



UNITED NATIONS
INDUSTRIAL DEVELOPMENT ORGANIZATION



CTCN
CLIMATE TECHNOLOGY CENTRE & NETWORK

**METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN Y EVALUACIÓN DE CAUDALES
ECOLÓGICOS Y PLANES DE MANEJO DE CUENCAS EN PARAGUAY.**

APLICACIÓN A LA CUENCA PILOTO DEL RÍO TEBICUARY.

3.2. METODOLOGÍAS DE DEFINICIÓN DE CAUDALES ECOLÓGICOS Y DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA PROPUESTA

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. CALIBRACIÓN DE LOS DATOS DE PRECIPITACIÓN	2
2.1. Calibración de los datos TRMM.....	2
2.2. Resultados de precipitaciones por subcuencas.....	5
2.3. Evapotranspiración potencial por subcuencas.....	6
3. ANÁLISIS DEL EFECTO DEL CAMBIO CLIMÁTICO EN LA CUENCA	9
3.1. Metodología	9
3.2. Resultados para el horizonte 2040-2070	12
4. SELECCIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL MODELO HIDROLÓGICO DE LA CUENCA DEL TEBICUARY	15
5. DESCRIPCIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE CAUDALES AMBIENTALES	21
5.1. Selección de métodos hidrológicos	21
5.2. Modelos hidro-biológicos o de simulación de hábitat.....	24
6. CONCLUSIONES	26

APÉNDICE 1. RESULTADOS DE LA CALIBRACIÓN DE LOS DATOS DE PRECIPITACIÓN

APÉNDICE 2. ANALYTICAL HAYAMI SOLUTION FOR THE DIFFUSIVE WAV FLOOD ROUTING PROBLEM WITH LATERAL INFLOW. ROGER MOUSSA, 2016

1. INTRODUCCIÓN

En este documento se describen los métodos y herramientas, así como algunos resultados intermedios derivados de las mismas, para la obtención de caudales ambientales en la cuenca del río Tebicuary. Cabe destacar que todos los métodos de cálculo de caudales ambientales requieren como dato de entrada series diarias de caudales suficientemente largas, en cada punto de análisis; para los denominados métodos hidrológicos, éste es el único dato necesario. Por lo tanto, para conseguir resultados de caudales ambientales fiables, el mayor esfuerzo debe centrarse en realizar un buen modelo hidrológico de la cuenca, calibrado con los datos de aforo disponibles; la calidad del modelo hidrológico se trasladará de forma directa a las estimaciones de caudales ambientales. Además dicho modelo es clave para incorporar sus resultados al modelo de gestión de los recursos hídricos de la cuenca, que permitirá establecer un conjunto de reglas de explotación que permitan armonizar la conservación del ecosistema fluvial (y por tanto los servicios ecosistémicos asociados) con los usos consuntivos.

Este documento se estructura en cuatro capítulos, además de esta introducción. En el capítulo 2 se presenta el método y los resultados de calibración de los datos de precipitación, combinando la información de los pluviómetros con la del proyecto TRMM. El capítulo 3 presenta el análisis del efecto del cambio climático en la cuenca del Tebicuary, donde se ha utilizado la base de datos Earth Exchange Global Daily Downscaled Projections (NEX-GDDP) para generar series de precipitación para el periodo 2041-2070 y distintos escenarios de cambio climático. En el capítulo 4 se incluye la selección y descripción del modelo hidrológico para la obtención de las series de caudales tanto para la situación actual como para los escenarios de cambio climático y, por último, en el capítulo 5 se describen los métodos que se van a utilizar para la obtención de los caudales ecológicos y que se presentan en el informe 3.4 – *Aplicación de la herramienta propuesta para la definición de caudales ecológicos en la cuenca del río Tebicuary*.

2. CALIBRACIÓN DE LOS DATOS DE PRECIPITACIÓN

En este apartado se presenta la metodología y resultados de la calibración de los datos procedentes del proyecto TRMM con los datos instrumentales de los 7 pluviómetros de la cuenca. Las características de los datos de precipitación empleados se detallan en el capítulo 4 del informe *3.1- Inventario y análisis de la información disponible*.

2.1. Calibración de los datos TRMM

Una primera comparación de ambas fuentes de información a escala diaria (Figura 1) arroja coeficientes de correlación bajos ($\rho^2 < 0.3$), lo que puede inducir a poner en duda la validez de las series de satélite. Sin embargo, tras una observación más detallada, se aprecia que existe un cierto retraso, de entre 1 y 2 días, entre la serie TRMM y la instrumental.

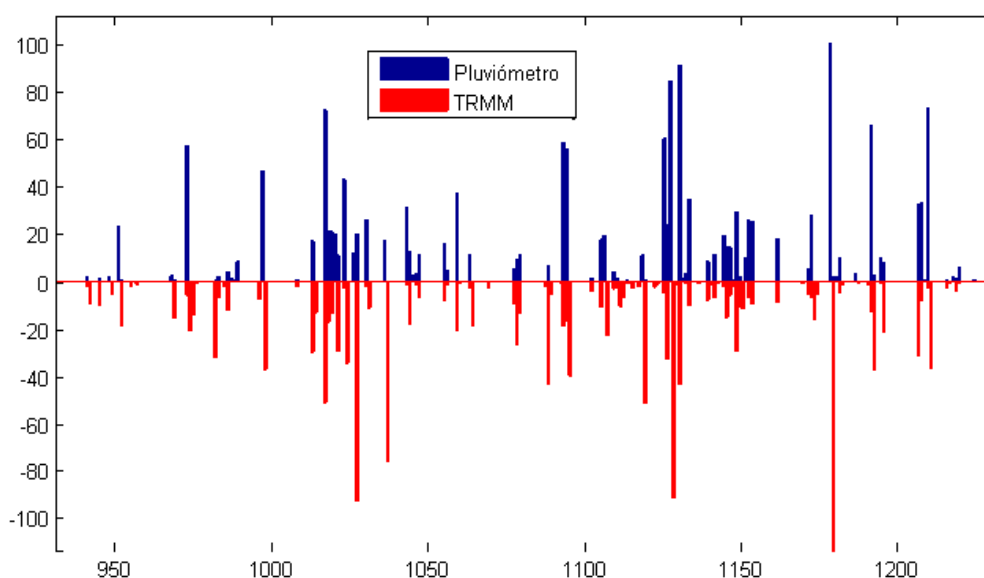


Figura 1. Comparación a escala diaria de un año de datos del pluviómetro n°1 con el punto TRMM más cercano. Precipitación en mm por día.

Comparando los mismos datos a escala mensual (Figura 2, arriba y abajo a la izquierda), donde desaparece el problema del desfase diario, se aprecia la gran coincidencia entre ambas fuentes. En el apéndice 1 se presentan todas las gráficas para el resto de pluviómetros.

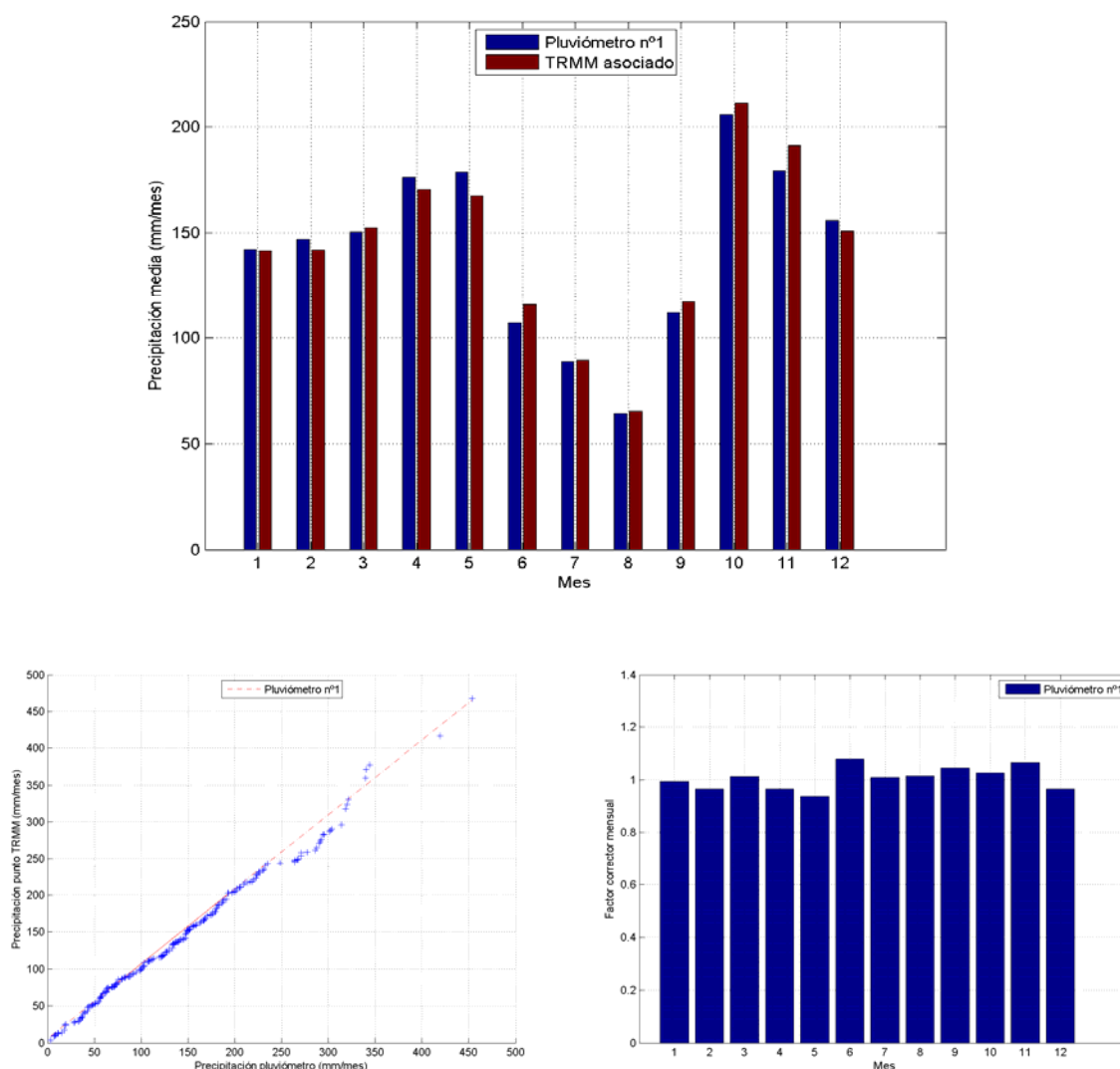


Figura 2. Comparación de datos de precipitación TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 1, a escala mensual. Arriba: valores medios mensuales por meses. Abajo izda: QQ-plot de ambas series. Abajo dcha: factores correctores a escala mensual.

Por tanto, el procedimiento para calibrar el modelo TRMM constará de los siguientes pasos:

1. Se seleccionan los puntos TRMM más cercanos a cada uno de los 7 pluviómetros (7 puntos de control).
2. Se adelanta un 1 día de la señal TRMM en todos los puntos (no sólo en los de control).
3. Se calcula en cada punto de control el valor medio mensual de la precipitación TRMM y de la instrumental. Se obtienen factores de corrección mensuales del TRMM, para que las medias coincidan.

4. Una vez obtenidos los 12 factores mensuales de corrección por cada punto de control, se promedian todos los factores para obtener un único factor de corrección mensual para todos los puntos TRMM de la cuenca.
5. Se aplican dichos factores a los datos diarios de los 140 puntos TRMM.

El hecho de no considerar un desfase fraccionario que maximice la correlación diaria (se ha adoptado un valor redondo de 1 día), y el de no interpolar series de la rejilla TRMM para obtener las series asociadas a los puntos donde hay pluviómetro, se deben a que ambos procedimientos modifican notablemente la proporción días con lluvia, que sin embargo es correcto en las series originales TRMM, por lo que se ha preferido preservarlo. Por otra parte, se han promediado sin más los factores mensuales procedentes de los siete puntos de control, porque no se ha detectado ningún patrón espacial que justifique emplear otros métodos más complejos de extrapolación.

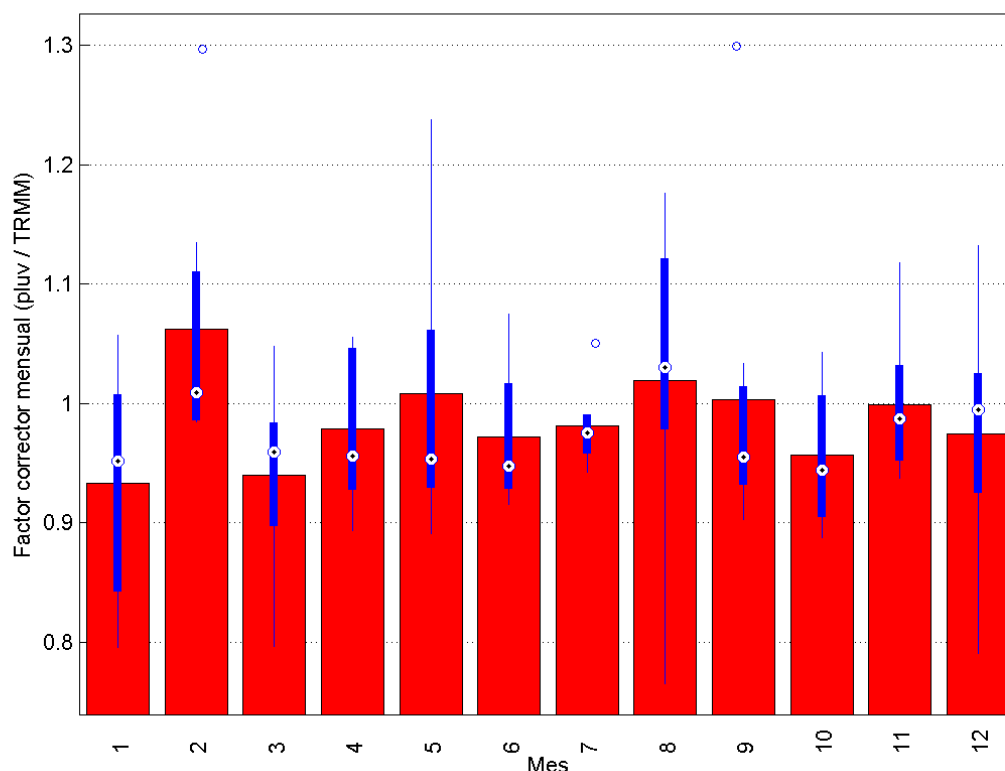


Figura 3. Variabilidad (líneas azules) y valores medios de los factores correctores mensuales de la precipitación.

La variabilidad de los factores correctores mensuales obtenidos, junto con los valores medios, se muestra en la Figura 3; se observa que los valores resultantes se encuentran siempre entre 0.9 y 1.1 (variaciones máx. de $\pm 10\%$ con respecto a los valores medidos por los pluviómetros). Las correcciones más importantes se producen en los meses de enero y febrero.

2.2. Resultados de precipitaciones por subcuencas

En el conjunto de la cuenca del río Tebicuary, el valor mediano de la precipitación anual es de 1577 mm, y los valores medios para años secos (probabilidad de superación 90%) y húmedos (probabilidad de superación 10%) oscilan entre 1290 mm y 2130 mm (Tabla 1). Por subcuencas, los resultados muestran un descenso de la precipitación media desde el sureste de la cuenca hasta el oeste-noroeste (Figura 4).

	Año seco (perc. 10 %)	Año mediano (perc. 50 %)	Año húmedo (perc. 90 %)
SC-1	1342	1658	2235
SC-2	1350	1641	2253
SC-3	1307	1620	2215
SC-4	1324	1580	2157
SC-5	1236	1613	2146
SC-6	1324	1598	2089
SC-7	1320	1552	2090
SC-8	1314	1499	2045
SC-9	1193	1469	2009
Media	1290	1577	2130

Tabla 1. Precipitación media anual (mm) en las subcuencas consideradas para distintos tipos de año hidrológico.

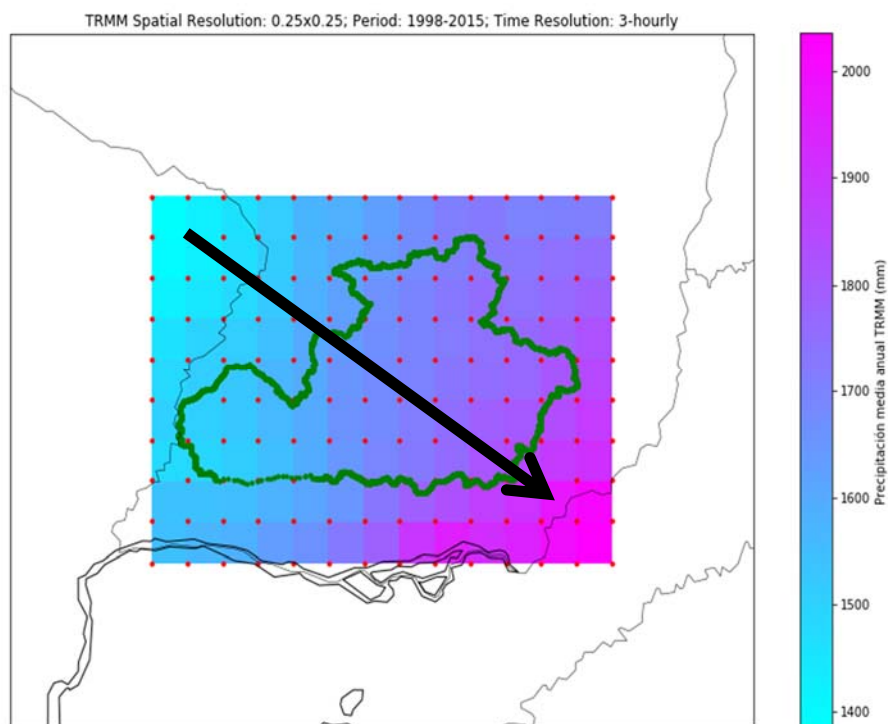


Figura 4. Gradiente de la precipitación media anual en la cuenca.

En la Figura 5 se presentan los valores de precipitación mensual para los tres tipos de años hidrológicos. Los meses más lluviosos son octubre y abril, mientras que los más secos en términos meteorológicos (que no hidrológicos, como se verá más adelante), son julio y agosto. Se pueden encontrar gráficas similares para cada subcuenca en apéndice 1.

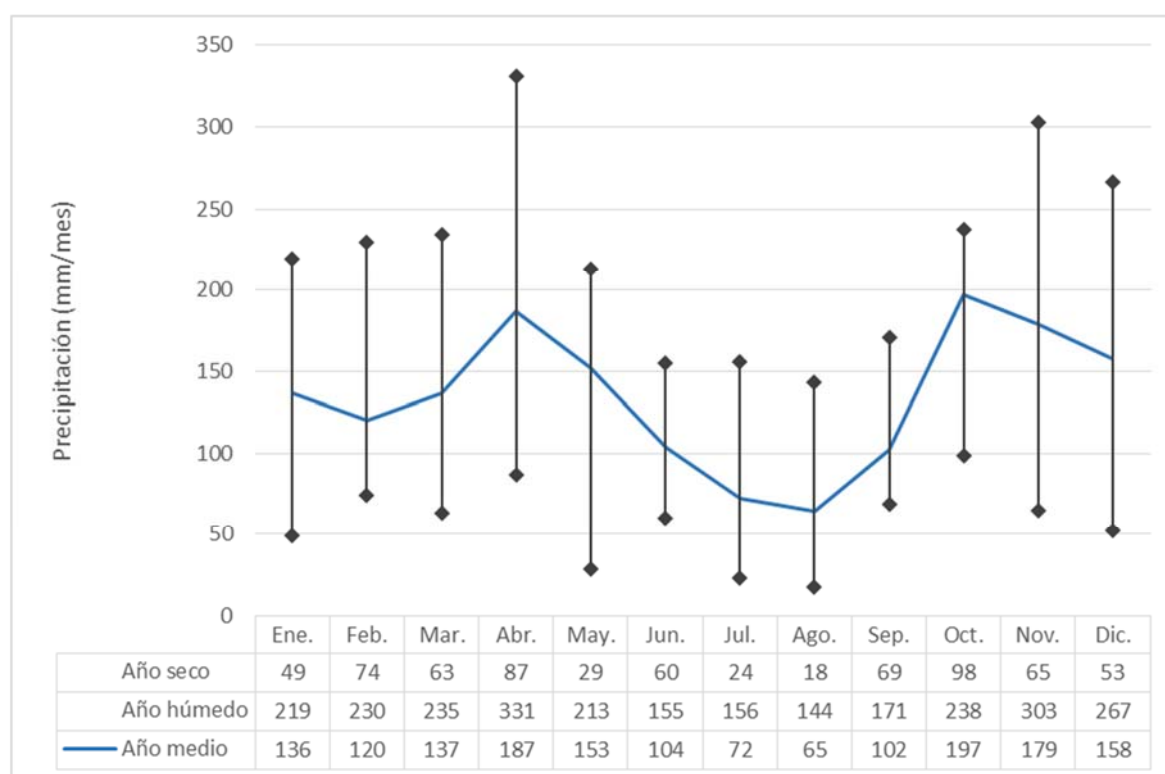


Figura 5. Rangos de valores de la precipitación media mensual para diferentes categorías de años hidrológicos en el conjunto de la cuenca del Tebicuary.

2.3. Evapotranspiración potencial por subcuencas

Las evapotranspiraciones potenciales (ETPs) derivada de la base de datos CGIAR-CSI, promediada en las subcuencas definidas en el área de estudio, se presentan en la Tabla 2. El valor promedio anual es de unos 1560 mm, y presentan una variación pequeña entre unos años y otros, como también puede verse en la Figura 6, donde se muestran los valores mensuales con sus percentiles del 10% y 90%. Los meses donde la atmósfera presenta una mayor capacidad de extraer energía del sistema se sitúan alrededor del cambio de año, entre noviembre y marzo, cuando la ETP es tres veces mayor por término medio que en los meses más fríos, de mayo a agosto.

	Año seco (perc. 10 %)	Año mediano (perc. 50 %)	Año húmedo (perc. 90 %)
SC-1	1586	1616	1669
SC-2	1521	1549	1597
SC-3	1553	1582	1632
SC-4	1499	1526	1572
SC-5	1538	1564	1614
SC-6	1521	1546	1595
SC-7	1504	1527	1576
SC-8	1521	1542	1591
SC-9	1510	1531	1580
Media	1534	1560	1610

Tabla 2. ETP media anual en las subcuencas consideradas para distintos tipos de año hidrológico.

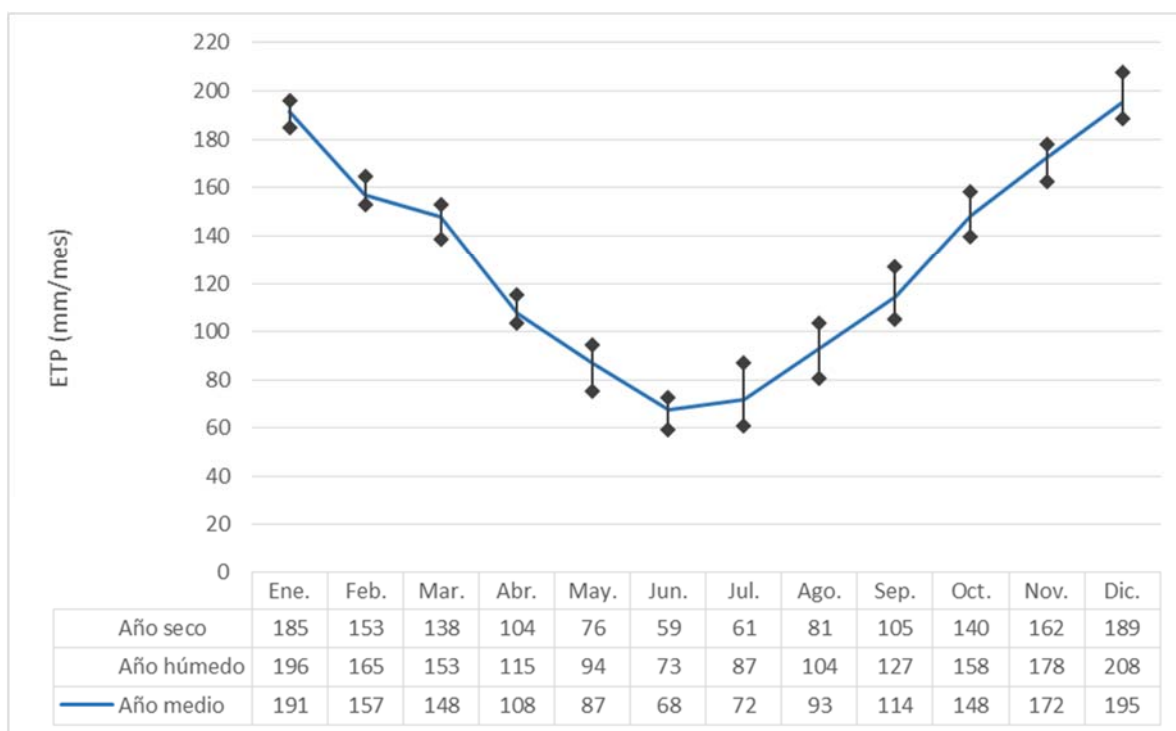


Figura 6. Rangos de valores de la ETP media mensual para diferentes categorías de años hidrológicos en el conjunto de la cuenca del Tebicuary.

Finalmente, en la Figura 7 se muestra la variabilidad de la ETP diaria por subcuencas, donde se aprecia cómo las cuencas de cabecera (1, 2, 3 y 4) tienden a tener valores máximos de ETP algo más altos que el resto.

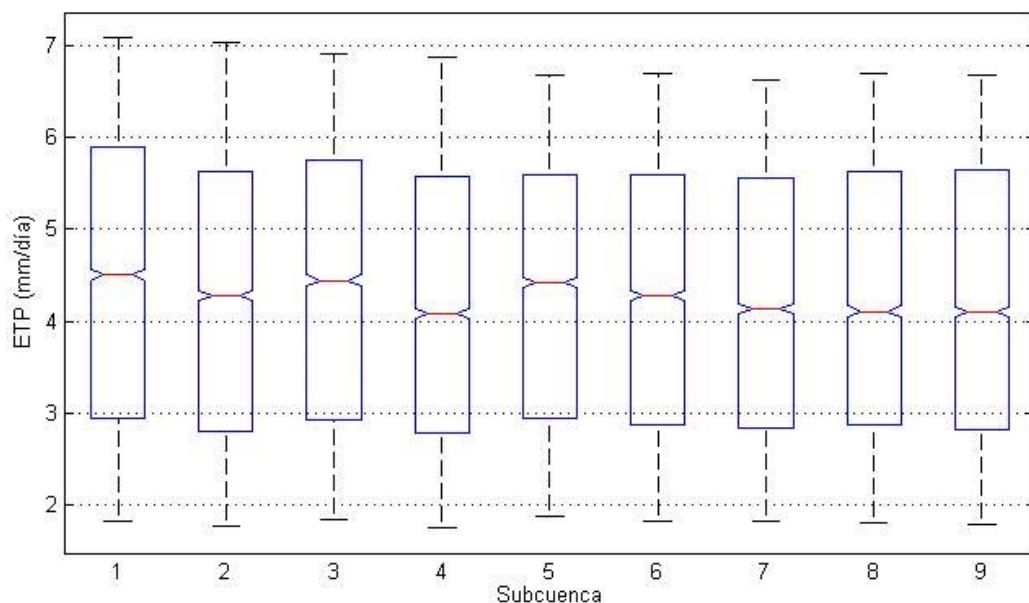


Figura 7. Variabilidad interanual (periodo 1998-2014) de la ETP por subcuencas. Las barras gruesas representan los datos situados entre los percentiles 25 y 75%. Las prolongaciones en línea discontinua son el rango del resto de los valores.

Combinando estos datos de ETP con los datos de precipitación media presentados en el apartado previo, se pueden obtener los coeficientes de aridez (ETP/P) medios por subcuencas (Tabla 3).

	Año seco (perc. 10 %)	Año mediano (perc. 50 %)	Año húmedo (perc. 90 %)
SC-1	1.18	0.97	0.75
SC-2	1.13	0.94	0.71
SC-3	1.19	0.98	0.74
SC-4	1.13	0.97	0.73
SC-5	1.24	0.97	0.75
SC-6	1.15	0.97	0.76
SC-7	1.14	0.98	0.75
SC-8	1.16	1.03	0.78
SC-9	1.27	1.04	0.79
Media	1.19	0.99	0.76

Tabla 3. Índices de aridez (ETP/P) medios anuales por subcuencas para distintos tipos de año hidrológico.

3. ANÁLISIS DEL EFECTO DEL CAMBIO CLIMÁTICO EN LA CUENCA

3.1. Metodología

Para determinar el efecto del cambio climático en la cuenca del Tebicuary se emplearán los resultados de la base de datos Earth Exchange Global Daily Downscaled Projections (NEX-GDDP) para generar series de precipitación para el periodo 2041-2070 y para distintos escenarios de cambio climático.

La base de datos NEX-GDDP, desarrollada por la NASA, contiene el downscaling estadístico de las proyecciones climáticas para 21 modelos globales del CMIP5 con una resolución temporal diaria y espacial de 25X25 km (Figura 7).

El método *quantile mapping* de corrección de sesgo (Piani, C., 2010¹) se utilizará para regionalizar la base de datos NEX-GDPP a la zona de estudio, corrigiendo a su vez el número de días de lluvia. Por otro lado el método de ensemble REA (Reliability Ensemble Averaging; Tebaldi, C. and Knutti, R., 2007²) es empleado para penalizar aquellos modelos estadísticamente más alejados de las series observadas.

Por otra parte, las funciones de distribución de las series de precipitación simuladas para el futuro son corregidas aplicando la diferencia calculada entre la series observadas y la simuladas en el periodo de referencia. Esto se hace para cada uno de los 12 meses de años. Por lo tanto, si bien se utiliza la información de muchos modelos, se les otorgarán pesos diferentes en función de su capacidad para reproducir las condiciones reales de esta cuenca, y se modificarán sus resultados para que reflejen en la medida de lo posible las condiciones locales.

¹ Piani, C., Haerter, J.O., Coppola, E. Statistical bias correction for daily precipitation in regional climate models over Europe (2010) Theoretical and Applied Climatology, 99 (1-2), pp. 187-192.

² Tebaldi, C., Knutti, R. The use of the multi-model ensemble in probabilistic climate projections (2007) Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 365 (1857), pp. 2053-2075.

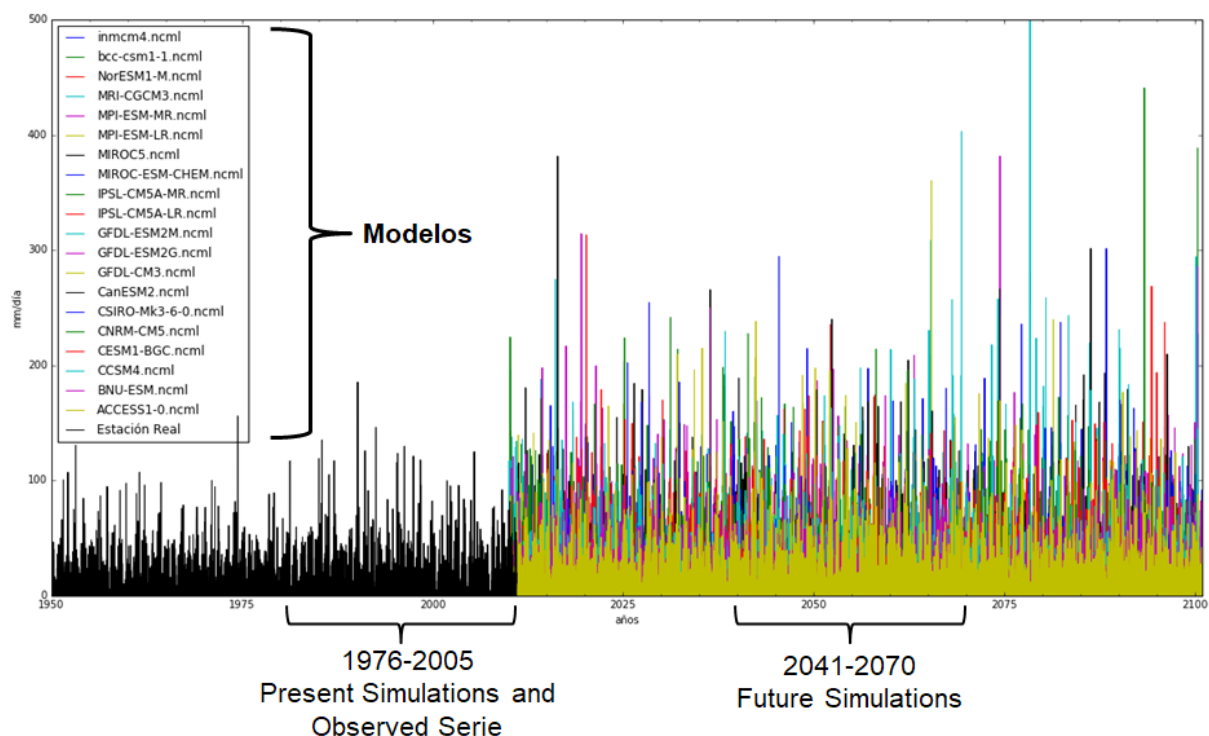


Figura 8. Ejemplo de serie observada y conjunto de simulaciones futuras.

Además de la intensidad de precipitación, el número de días de lluvia también es corregido mediante procesos aleatorios. El peso asignado a cada uno de los modelos, en función de cuánto es capaz de reproducir la serie de referencia, viene dado por la siguiente expresión:

$$W_i \cong \frac{\sqrt{E((M_P - S_P)^2)}}{\sum_{M=1}^{21} \sqrt{E((M_P - S_P)^2)}} \quad \begin{array}{l} M_P = \text{Serie precip. (NEX - GDDP) Presente} \\ S_P = \text{Serie precip. Presente} \end{array}$$

Para el Quinto Informe de Evaluación del IPCC (AR5), la comunidad científica ha definido un grupo nuevo de escenarios, denominados "trayectorias de concentración representativas" (RCP, por sus siglas en inglés). Estos escenarios se centran en las emisiones antropogénicas y no incluyen cambios en impulsores naturales.

Los RCP representan el forzamiento radiativo total calculado para el año 2100 respecto al año 1750 (por ejemplo el RCP2.6 significa 2.6 W/m²). Se podría decir que el RCP2.6 representa un escenario de mitigación, el RCP4.5 y RCP6.0 son escenarios de estabilización y el RCP8.5 corresponde a un escenario con un nivel muy alto de emisiones de GEI.

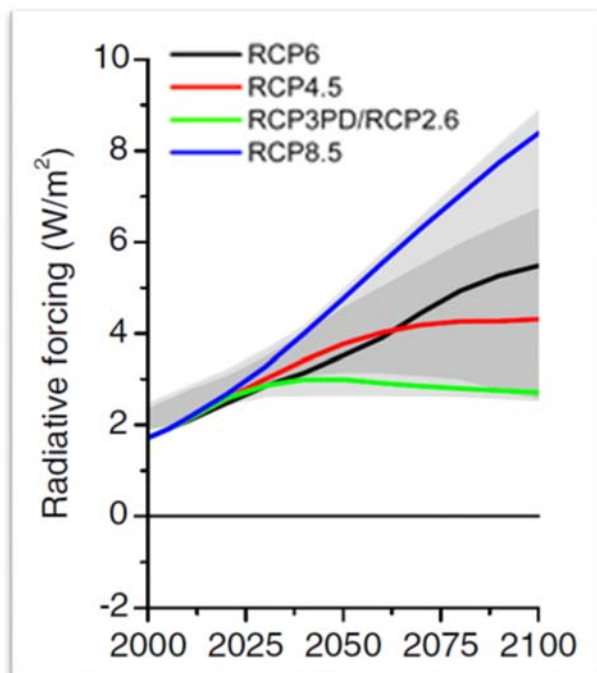


Figura 9. Evolución prevista según el AR5 del IPCC del forzamiento radiativo según las trayectorias de concentración representativas o RCPs.

El forzamiento radiativo se define como la variación, expresada en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, del flujo radiativo (el descendente menos el ascendente) en la tropopausa o en la parte superior de la atmósfera, debida a una variación del causante externo del cambio climático, como por ejemplo una variación de la concentración del CO_2 equivalente o de la radiación solar. Las fuentes principales, positivas y negativas, de dicho forzamiento se presentan de forma simplificada en la Figura 9. Para este trabajo se han considerado dos RCP de cálculo, la 4.5 y 8.5, considerándose la primera como un escenario moderadamente optimista y la segunda como uno pesimista.

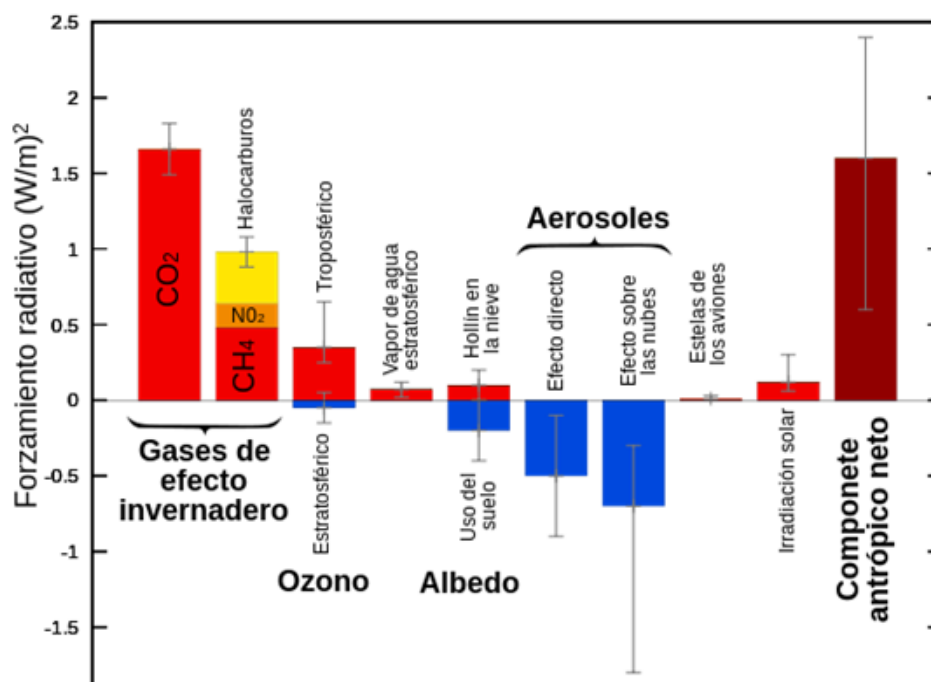


Figura 10. Fuentes del forzamiento radiativo. Fuente: IPCC AR5.

3.2. Resultados para el horizonte 2040-2070

Los porcentajes de cambio en la precipitación media anual para el periodo 2041-2070 se presentan gráficamente en la Figura 10 y, por subcuencas, en la Tabla 4.

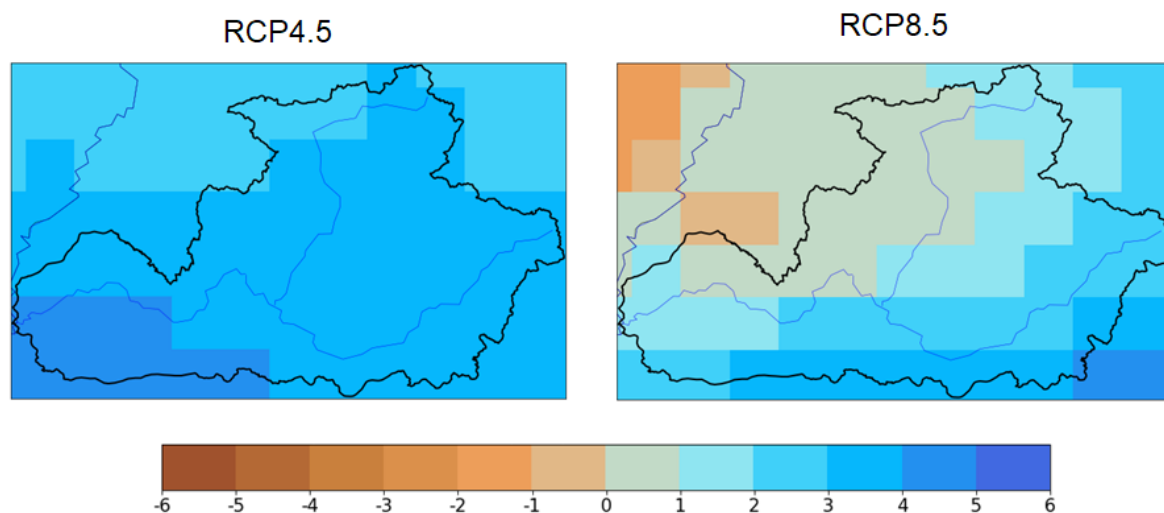


Figura 11. Porcentaje de cambio en la precipitación media anual en el área de estudio para el periodo 2041-2070.

	RCP 4.5		RCP 8.5	
	P (mm)	% Cambio	P (mm)	% Cambio
SC-1	1704	2.8%	1696	2.3%
SC-2	1692	3.1%	1670	1.8%
SC-3	1660	2.5%	1652	2.0%
SC-4	1634	3.4%	1615	2.2%
SC-5	1654	2.5%	1623	0.6%
SC-6	1648	3.1%	1606	0.5%
SC-7	1597	2.9%	1583	2.0%
SC-8	1552	3.5%	1523	1.6%
SC-9	1528	4.0%	1486	1.2%
CUENCA	1628	3.2%	1601	1.5%

Tabla 4. Cambios en la precipitación media anual para el período 2041-2070, por subcuencas.

De la misma forma, los resultados de variación en el número de días de lluvia se muestra espacialmente en la Figura 12 para las dos RCPs elegidas. Finalmente, la Tabla 5 incluye la variación en la ETP del modelo hidrológico.

Se observa que en términos generales la precipitación experimentará un aumento moderado en la cuenca, sobre todo en la zona sureste y especialmente para la RCP 8.5. Sin embargo, la nueva precipitación se producirá en un número menor de días al año, lo que hace pensar en tormentas más cortas o menos frecuentes, y de mayor intensidad. En cuanto a la ETP, se detecta también un aumento derivado de unas temperaturas más altas, que es más significativo en el RCP 8.5. El efecto en los caudales de estos efectos combinados se analizará en el capítulo siguiente.

	RCP 4.5		RCP 8.5	
	ETP (mm)	% Cambio	ETP (mm)	% Cambio
SC-1	1626	1.2%	1678	3.8%
SC-2	1572	1.4%	1614	4.2%
SC-3	1582	1.6%	1664	5.2%
SC-4	1526	1.5%	1611	5.6%
SC-5	1564	1.9%	1662	6.3%
SC-6	1546	1.8%	1636	5.8%
SC-7	1527	1.4%	1611	5.5%
SC-8	1542	1.2%	1622	5.2%
SC-9	1531	0.6%	1605	4.8%
CUENCA	1560	1.5%	1639	5.1%

Tabla 5. Cambios en la ETP media anual para el periodo 2041-2070, por subcuencas.

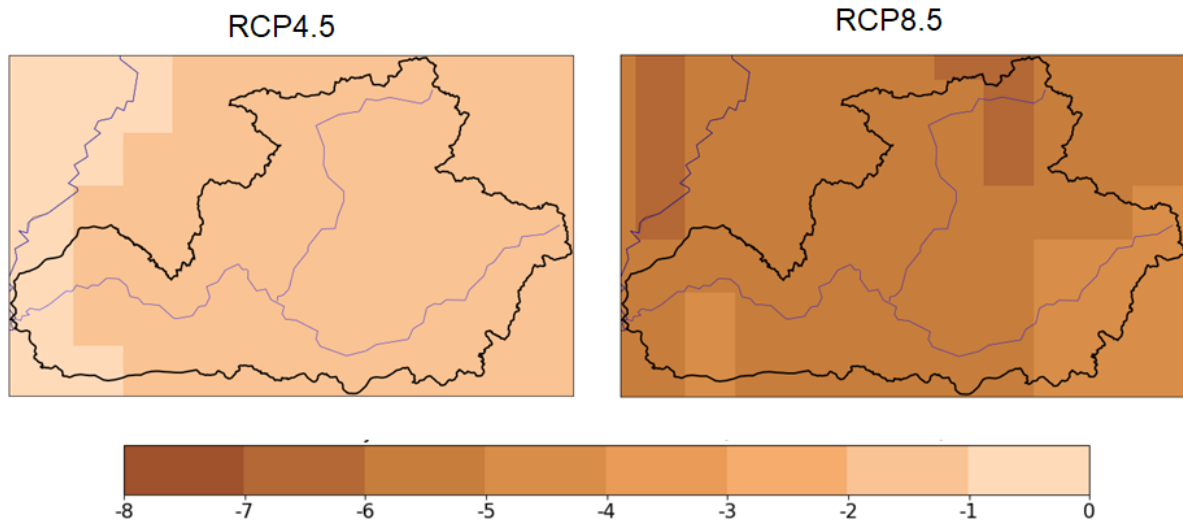


Figura 12. Porcentaje de cambio en el número de días de lluvia para el periodo 2041-2070.

4. SELECCIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL MODELO HIDROLÓGICO DE LA CUENCA DEL TEBICUARY

Como se ha visto en el informe 3.1 – *Inventario y análisis de la información disponible*, la cuenca del río Tebicuary tiene algunos rasgos característicos, en especial la baja pendiente y la alta sinuosidad, que condicionan la propagación de los hidrogramas a lo largo de la misma.

A escala diaria, la evolución del caudal en los puntos medios y bajos de la cuenca está dominada por los procesos difusivos de propagación de las ondas, tanto o más que por los procesos hidrológicos convencionales, que están presentes pero se manifiestan de forma poco reconocible (no se aprecian los típicos ascensos rápidos de caudal y los descensos exponenciales de las curvas de recesión clásicas). En Villa Florida, la única estación con datos suficientes para realizar una calibración formal, existen aproximadamente 12 días de desfase entre los valores pico de precipitación media en la cuenca y el pico de caudal, como se puede observar en la Figura 13; es de esperar que otras subcuencas experimenten un fenómeno similar, aunque con otros desfases. Teniendo en cuenta que el orden de magnitud de la distancia que debe recorrer el flujo desde el centro de gravedad de la cuenca hasta Villa Florida es de unos 200 km (100 km en línea recta, que equivalen al doble aproximadamente debido a la sinuosidad del cauce), la velocidad media de propagación de los hidrogramas es de 16.7 km/día (0.19 m/s o 0.69 km/h).

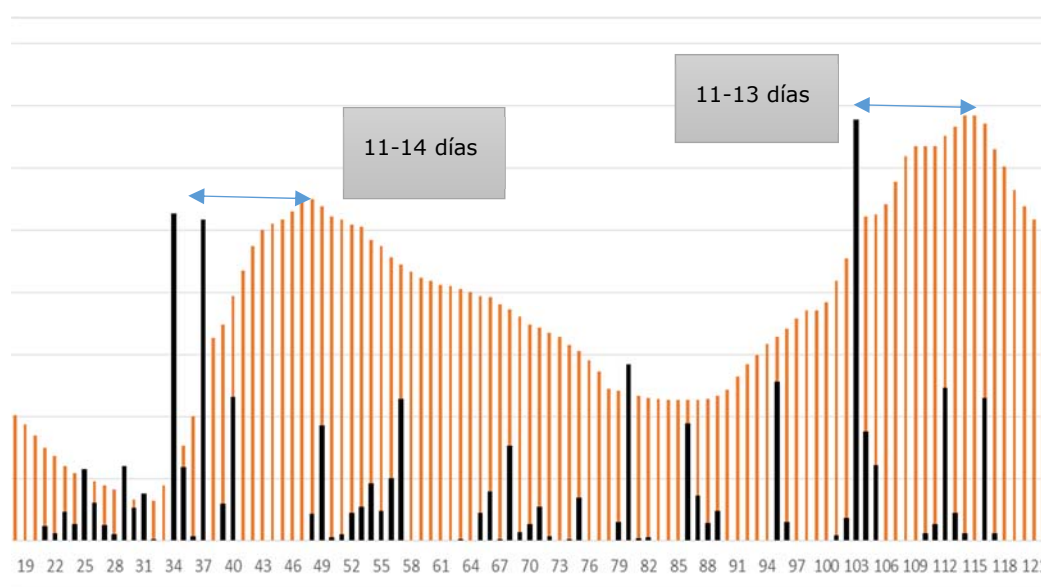


Figura 13. Evolución de la precipitación media en la cuenca (barras negras) y los caudales (barras naranjas) en Villa Florida durante un periodo de 100 días. La escala vertical está distorsionada y es diferente en ambas señales, con el objetivo de resaltar el desfase temporal.

La mayor parte de los modelos hidrológicos no son aptos para simular esta combinación de procesos físicos, que son propios de tramos medios y bajos de grandes ríos. Los

paquetes más extendidos para el análisis hidrológico (por ejemplo HEC-HMS, SWAT, MIKE-SHE, VIC, etc.) así como los modelos hidrológicos agregados (PDM, IHACRES, GR4J, NAM, por nombrar algunos) no permiten propagar de forma exacta los hidrogramas (aunque sí aportan algunas soluciones aproximadas, que en muchos casos resultan aceptables), y por tanto requiere de otro modelo externo para realizar esta tarea.

A la vista de esta situación, el Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH) de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS) ha desarrollado el Modelo de Grandes Bacias (MBG) precisamente para resolver este problema, que es común en los ríos de Brasil. Por otra parte, Yamazaki et al.³ (2011) propusieron el modelo CaMa-Flood, acoplado al modelo VIC, para realizar la propagación de las ondas en los cauces.

Para este estudio, se ha optado por construir un modelo hidrológico *ad hoc* de la cuenca del río Tebicuary, combinando un modelo hidrológico agregado, el denominado modelo de equilibrio logístico o LEM (por sus siglas en inglés), con un modelo de propagación basado en la ecuación de onda difusiva (ecuación de Hayami). El motivo de esta decisión es reducir al máximo los parámetros necesarios para reproducir los rasgos principales del comportamiento de la cuenca, y a ser posible conseguir que dichos parámetros tengan un sentido físico y puedan extrapolarse con ciertas garantías a subcuencas donde no hay datos de aforos, que son mayoría en el Tebicuary. Estos criterios no son cumplidos por el modelo brasileño MGB, que requiere de un alto número de parámetros difíciles de establecer a priori, ni por el modelo de Yamazaki et al., que sólo se ha utilizado, con resultados diversos, para cuencas mucho más extensas.

El modelo propuesto, que se denominará LEM-DW (Logistic Equilibrium Model with Diffusive Wave), es un modelo agregado conceptual que se basa en discretizar la cuenca completa en un conjunto de elementos o unidades hidrológicas (subcuencas) dispuestas en forma de árbol, según la topología de la red. Cada una de estas unidades se caracteriza por un cauce principal y un área tributaria lateral simétrica con respecto al cauce principal, de forma rectangular (Figura 14). El territorio asociado, a través de múltiples cauces de orden menor, genera escorrentía que se incorpora como un caudal lateral homogéneo (q_L) por unidad de longitud del valle del cauce principal. Se asume que las cuencas laterales, de tamaño un orden de magnitud inferior, se incorporan al eje principal sin efectos de propagación en cauce significativos, de tal forma que el enrutamiento (routing) puede realizarse con métodos convencionales (desfase constante o Muskingum-Cunge). Todos los efectos de propagación se producen a lo largo del eje principal, y por tanto q_L se puede obtener mediante un modelo agregado convencional, en este caso el LEM (aunque podría acoplarse cualquier otro como PDM, NAM, GR4J, IHACRES, etc.).

³ Yamazaki, D., S. Kanae, H. Kim, and T. Oki (2011), A physically based description of floodplain inundation dynamics in a global river routing model, Water Resour. Res., 47, W04501, doi: 10.1029/2010WR009726.

Este planteamiento separa en sendos submodelos acoplados los procesos hidrológicos clásicos (dinámica del suelo y enrutamiento simple), por un lado, y los procesos de naturaleza hidráulica (solución de onda difusiva), por otro. Las unidades hidrológicas asimilables a este esquema conceptual deben cumplir a priori una serie de requisitos:

- La cuenca tributaria al eje principal debe ser de un tamaño relativamente grande ($>103 \text{ km}^2$) y con pendiente baja, para que los efectos de propagación sean relevantes.
- Las cuencas que vierten al eje principal deben cumplir en conjunto las condiciones opuestas: deben tener un tamaño de orden de magnitud menor que la cuenca en conjunto ($<103 \text{ km}^2$) y los efectos de propagación deben poder representarse con un modelo de enrutamiento simple (de los que incorporan los modelos agregados).
- Es recomendable, en términos generales, que la relación de aspecto (longitud/anchura medias) de la cuenca modelada sea mayor de 1.5-2. Este criterio es una versión simplificada del criterio anterior.
- Es conveniente, aunque no necesario, que la cuenca sea lo más simétrica posible con respecto al eje principal.

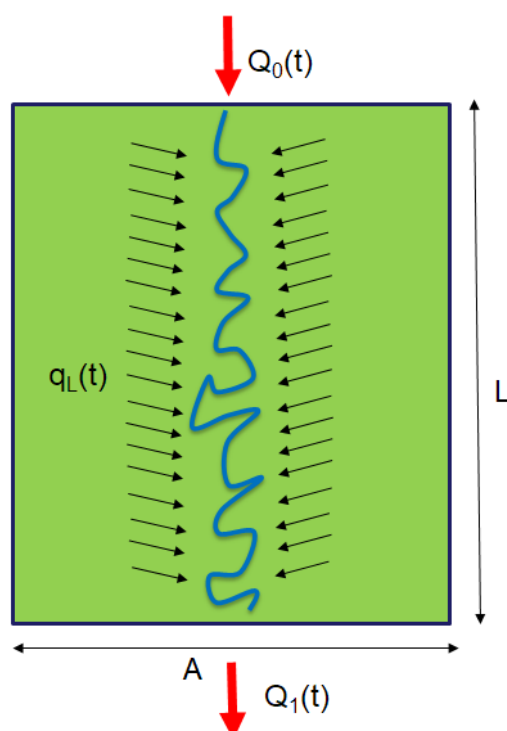


Figura 14. Esquema conceptual del elemento básico del modelo hidrológico LEM-DW.

El modelo de equilibrio logístico o LEM (Prieto et al. 2013) es un modelo hidrológico agregado basado en dos hipótesis fundamentales:

1. Las cuencas, bajo condiciones climáticas y de usos del suelo estacionarias, tienden a un coeficiente de escorrentía de equilibrio, gobernado por una expresión de tipo Budyko.
2. En condiciones reales (no estacionarias), las cuencas persiguen el equilibrio siguiendo una ley de crecimiento limitado (ecuación logística).

El modelo queda finalmente recogido en la siguiente ecuación fundamental:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = k \cdot P(t - \tau) \cdot Q(t) \cdot \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_{eq}(t - \tau)}\right)$$

Donde $Q(t)$ es la serie de caudales resultado y Q_{eq} es el caudal de equilibrio derivado de multiplicar el coeficiente de escorrentía de equilibrio (C_{eq}) por la precipitación instantánea:

$$Q_{eq}(t) = P(t) \cdot C_{eq}(t) = P(t) \cdot e^{-a \cdot \hat{\psi}(t; \alpha)}$$

La variable $\hat{\psi}$ es el índice de aridez dinámico, que resulta de dividir las series de ETP y P suavizadas (variables con * en las fórmulas):

$$\hat{\psi}(t; \alpha) = \frac{ETP^*(t; \alpha)}{P^*(t; \alpha)}$$

El modelo tiene cuatro parámetros: α , τ , k , α . Dado que la ecuación logística tiene solución analítica para valores constantes de los parámetros, dicha solución será la base para obtener el esquema explícito de resolución numérica:

$$Q_t = \frac{Q_{t-1} \cdot Q_{eq,t-\tau}}{Q_{t-1} + (Q_{eq,t-\tau} - Q_{t-1}) \cdot \exp(-k \cdot \Delta t \cdot P_{t-\tau})}, \quad Q_{eq,t-\tau} > 0$$

$$Q_t = \frac{Q_{t-1} \cdot C_{eq,t}}{C_{eq,t} + k \cdot Q_{t-1} \cdot \Delta t}, \quad Q_{eq,t-\tau} = 0$$

Las variables desfasadas $Q_{eq,t-\tau}$ y $P_{t-\tau}$ pueden expresarse como combinaciones lineales de sus últimos valores discretos, asumiendo que el parámetro de desfase τ es menor que el incremento de tiempo Δt , en este caso 1 día:

$$P_{t-\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \cdot P_t + \frac{\tau}{\Delta t} \cdot P_{t-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t$$

$$Q_{eq,t-\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \cdot Q_{eq,t} + \frac{\tau}{\Delta t} \cdot Q_{eq,t-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t$$

Donde:

$$Q_{eq,t} = P_t \cdot C_{eq,t}$$

$$C_{eq,t} = \exp(-a \cdot \hat{\psi}_t(\alpha))$$

(xx)

El índice de aridez dinámico $\hat{\psi}_t(\alpha)$ se puede obtener fácilmente empleando el algoritmo recursivo de suavizado exponencial:

$$\hat{\psi}_t(\alpha) = \frac{\widehat{PE}_t(\alpha)}{\widehat{P}_t(\alpha)}$$

$$\widehat{PE}_t(\alpha) = \alpha \cdot PE_t + (1 - \alpha) \cdot \widehat{PE}_{t-1}$$

$$\widehat{P}_t(\alpha) = \alpha \cdot P_t + (1 - \alpha) \cdot \widehat{P}_{t-1}$$

La segunda parte del modelo resuelve la evolución del caudal $Q(x,t)$ a lo largo del eje principal, empleando la solución analítica de la ecuación de Hayami con flujo lateral:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) - D \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0$$

Que fue obtenida por Moussa (1996⁴). $Q(x,t)$ es el caudal en el cauce principal, $q(t)$ es el caudal lateral (q_L en la Figura 14) y C , D son los dos parámetros fundamentales del modelo difusivo, la celeridad (m/s) y la difusividad (m^2/s), respectivamente. Como en toda ecuación diferencial, deben especificarse las condiciones iniciales $Q(x,0)$ y las de contorno $Q(0,t)$.

Asumiendo que C y D son constantes, la solución analítica de esta ecuación permite construir un esquema numérico explícito de resolución, basado en ella, eficiente en términos computacionales y con alto grado de estabilidad numérica (pero no incondicionalmente estable, como se verá más adelante). Por brevedad y para no sacrificar el rigor, se ha preferido incluir en el apéndice 2 el artículo original de Moussa, con las hipótesis implicadas en la ecuación y su solución completa desarrollada (empleando transformadas de Laplace), en lugar de resumirlo aquí. Las expresiones analíticas finales del modelo empleado están recogidas en las ecuaciones (7), (8), (9), (47), (48) y (49) del artículo; en este caso, la integral del convolución que es la base de la solución analítica, se ha resuelto numéricamente asumiendo funciones por tramos.

Asumiendo que el enrutamiento de las cuencas laterales viene dado por un desfase constante proporcional al tiempo medio de concentración, y que las magnitudes de longitud

⁴ Moussa, R. (1996). Analytical Hayami solution for the diffusive wave flood routing problem with lateral inflow. *Hydrological processes*, 10(9), 1209-1227.

(L), anchura (A) y sinuosidad del cauce principal (S) se determinan por criterios geográficos, el modelo LEM-DW consta de 5 parámetros por cada elemento considerado:

- a , k , α del submodelo LEM. Estos parámetros reflejan principalmente el comportamiento de la cuenca (proceso de humectación y secado del suelo), así como el tipo de flujo dominante (Base Flow Index).
- C y D del submodelo de la onda difusiva. Estos parámetros reflejan las características hidráulicas del cauce principal (pendiente media, rugosidad y anchura media).

La implementación numérica de ambos submodelos (el LEM y la onda difusiva) se ha realizado en el entorno Matlab. La calibración del modelo puede hacerse de forma manual (ensayo-error) o automática. En este trabajo se han aplicado un algoritmo de calibración automática (supervisada) que hace una búsqueda global en un hipercubo del espacio de los parámetros, y luego aplica el algoritmo local *fmincon*, también de Matlab, en cada región explorada. La función objetivo que se desea minimizar, en este caso, será $1-NS$, donde NS es el coeficiente de Nash-Sutcliffe, una medida muy extendida de bondad de ajuste en el modelado hidrológico, que va de $-\infty$ a 1 (siendo 1 el ajuste perfecto y 0 el ajuste derivado de aproximar una serie con su valor medio constante).

5. DESCRIPCIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE CAUDALES AMBIENTALES

Este apartado se centra en primer lugar en describir los métodos de tipo hidrológico para obtener los caudales ambientales en la cuenca del río Tébicuary, para pasar acto seguido a los métodos biológicos, de carácter más complejo.

5.1. Selección de métodos hidrológicos

Los métodos de cálculo de caudales ambientales basados en métodos hidrológicos consisten en aplicar una serie de operaciones y filtros sobre una serie temporal suficientemente larga (en general más de 10 años) de caudales diarios, medidos u obtenidos por simulación numérica en un determinado tramo fluvial. Al no intervenir de manera explícita otras variables (topográficas, hidráulicas o biológicas) más allá de la secuencia de caudales, se puede considerar, en sentido estricto, que los caudales ambientales derivados de estos métodos son un post-proceso del modelado hidrológico; por lo tanto, la validez y representatividad de los resultados obtenidos dependen directamente de la bondad de las series simuladas.

Para este estudio se ha optado por emplear una combinación de métodos, entre los que destaca el método de los caudales básicos propuesto por Palau (2003). Este método ha sido adoptado (en ocasiones con ligeras modificaciones) por diversas Administraciones Hidráulicas en España y Latinoamérica. Se caracteriza por ser algo más complejo en cuanto al cálculo que el resto, que se basan en obtener determinados estadísticos de la curva de caudales acumulados (un porcentaje de la media o ciertos percentiles) o en los determinar el mínimo de la media móvil de la serie, para una cierta ventana. No obstante, también se presentarán los resultados que proporcionan estos métodos basados en estadísticos y medias móviles.

Palau⁵ define el “Caudal básico de mantenimiento” como el caudal que hay que dejar en un río aguas abajo de cada aprovechamiento de regulación o derivación para mantener un nivel admisible de desarrollo de la vida acuática. El problema está en definir cuál es ese “nivel admisible de desarrollo”. Como primera aproximación, se puede considerar que un nivel admisible tendrá que estar dentro del rango de variabilidad natural del sistema considerado (río) y lo más alejado posible de eventos hidrológicos con baja probabilidad de ocurrencia. El nivel admisible para el desarrollo de la vida acuática se logra con un “caudal de mantenimiento” representativo que se encuentre entre los valores mínimos y medios de la serie hidrológica estudiada. La variación hidrológica tiene un papel importante

⁵ A. Palau and J. Alcazar, “The Basic Flow: An Alternative Approach to Calculate Minimum Environmental Instream Flows”, Proceedings of 2nd International Symposium on Habitat Hydraulics, Canadá, 1996.

en la estructuración de la diversidad biótica en los ecosistemas de los ríos, ya que controla las condiciones de hábitat dentro del cauce del río, llanuras aluviales y las zonas hiporréicas (aguas subterráneas afectadas por la corriente). De esta forma, se reconoce que la variación hidrológica tiene un factor importante que favorece el hábitat de los ecosistemas ribereños. También se reconoce que tanto el rango de variación natural intra e interanual de los regímenes hidrológicos como las características asociadas de tiempos, duración, frecuencia y nivel de cambio, son fundamentales para sustentar la biodiversidad nativa y la integridad de los ecosistemas acuáticos.

El método parte del cálculo del caudal base a partir de la técnica de "medias móviles" aplicadas sobre intervalos de datos de amplitud creciente. La base de cálculo son las medias móviles obtenidas a partir de la fórmula:

$$\mu_{p,s}^j = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{k=s} q_{p+k-1}^j$$

donde "s" es el intervalo escogido de media móvil (varía de 1 a 100), "p" es el número de orden de la media móvil dentro de cada columna de la matriz (varía de 1 a 366 - s) y "j" es el año considerado.

Sobre cada columna de esta matriz (que responde a cada uno de los años considerados), y empezando por el último año disponible (más actual), se calculan las medias móviles sobre intervalos de orden crecientes (retardos) comenzando en 1 (los propios datos de origen) hasta un máximo de 100 (medias de datos tomados de 100 en 100), de tal forma que se obtienen "j" tablas trapezoidales de 100 columnas y un número de filas que va de 365 en la primera columna (medias móviles de orden 1) a 266 en la última columna (medias móviles de orden 100).

De cada una de las columnas se obtiene el valor mínimo, que correspondería al promedio del período de caudales medios mínimos diarios de 1, 2, 3, ..., 100 días consecutivos, y que tiende hacia el caudal medio anual (media móvil de orden 365), siendo por tanto siempre menor que él. Esto se repite para cada uno de los años considerados, y se obtiene una matriz de caudales mínimos de (nº de años) x 100 datos. A partir de la matriz de mínimos, se calculan las medias aritméticas por columnas, obteniéndose una serie de 100 valores (vector vs) sobre el que se calcula el mayor incremento relativo entre cada par de valores consecutivos, siendo el Qb el caudal mayor que define dicho par de valores. A continuación se presenta un esquema orientativo del proceso de cálculo del caudal básico a partir de una matriz inicial de caudales medios diarios de "n" años.

La flexibilidad de esta metodología permite variar, bajo un criterio adecuado, algunos de sus cálculos. Así sucede con la parte final del cálculo del Qb, que puede realizarse, tal y como considera el propio autor, procediendo de la siguiente manera alternativa: en lugar de calcular directamente el vector media en función de la matriz de (nº de años) x 100 obtenida, se calculan los incrementos relativos para cada una de las filas de dicha matriz, así como el caudal correspondiente al máximo incremento en cada una de ellas. De esta forma se obtiene un número de caudales mínimos igual al número de años del período de estudio, siendo el Caudal Básico la media de éstos. Para este estudio, el caudal básico

obtenido por procedimiento inicial se denominará Q_{b1} , y el de aplicar ésta última variante Q_{b2} . Por lo tanto, se van a determinar dos valores diferentes del caudal básico para cada tramo.

Una vez calculado el caudal base (Q_b), el método original permite determinar un caudal adicional, llamado "caudal de acondicionamiento", el cual se considera un suplemento al Q_b , que se calcula a partir de la simulación de secciones representativas del tramo objeto de aprovechamiento y a partir de la comprobación del cumplimiento de unas condiciones de conservación predefinidas para el uso específico del tramo de estudio. Si el Q_b es insuficiente para cumplir con condiciones de habitabilidad o de calidad del agua, se puede establecer un caudal de acondicionamiento (caudal adicional al Q_b). El Q_b más el caudal de acondicionamiento, definen el denominado caudal de mantenimiento. En el caso del Tebicuary, se considerará que el caudal de acondicionamiento es igual o menor que el básico, por lo que caudal básico, caudal de mantenimiento y caudal ambiental (término no reconocido por Palau) representan la misma magnitud.

Antes de aplicar el método de Palau, se debe realizar un análisis exploratorio gráfico y cuantitativo, con el fin de confirmar la consistencia y homogeneidad de la serie hidrológica utilizada. En primer lugar, debe garantizarse que las series utilizadas no presentan tendencias en sus parámetros estadísticos (es decir, son estacionarias). Por otra parte, el método de Palau es susceptible a la variabilidad hidrológica de los registros de caudal, por lo que también se debe comprobar el coeficiente de variación interanual para determinar si la desviación típica era significativa con respecto a la media.

En el cálculo del caudal básico por el método de las medias móviles, es importante determinar el mes de inicio del año hidrológico, ya que puede condicionar el resultado final. Por ello Palau recomienda iniciar el año en un mes que ni contenga el mínimo caudal medio diario anual, ni el caudal medio mensual diario más bajo. Para el caso del río Tebicuary, es adecuado el uso del año natural, con las series comenzando en enero.

Además del caudal básico, para este proyecto se aplicarán otros métodos hidrológicos alternativos de determinación de los caudales ambientales, que han sido utilizados en otros lugares como valores de referencia (y, concretamente, recomendados por la normativa de aguas española, hasta la transposición de la Directiva Marco del Agua en 2003, que dio un impulso a los métodos biológicos):

- Valores medios de los mínimos anuales de la media móvil de 21 y 25 días (Q_{mm21} , Q_{mm25}).
- Percentiles del 5 y 15% de la curva de caudales acumulados (Q_{p5} y Q_{p15}).
- Caudal equivalente al 10% del caudal medio interanual (Q_{ma}).

En definitiva, en este estudio se determinarán siete valores de caudales ecológicos para cada tramo de río: dos derivados del método del caudal básico, más los cinco valores anteriores. Dada la naturaleza heurística de todos estos métodos y la limitada base ecológica en que se sustentan, el hecho de tener obtener tantos estimadores sólo permite tener una idea de la volatilidad (o estabilidad) del enfoque hidrológico y, en última instancia, proponer un caudal medio ponderando con diferentes pesos los resultados. Tales

pesos deberán asignarse por juicio de experto, y en este caso se proponen los siguientes pesos:

- 20% para cada uno de los caudales básicos (total 40%).
- 12.5 % para los caudales de media móvil 21 y 25 (total 25%).
- 12.5 % para los caudales del percentil 5 y 15% (total 25%).
- 10% para el caudal basado en el caudal medio.

Por tanto, el estimador medio del caudal ambiental por tramos será:

$$Q_a = 0.4 \cdot \frac{Q_{b1} + Q_{b2}}{2} + 0.25 \cdot \frac{Q_{mm21} + Q_{mm25}}{2} + 0.25 \cdot \frac{Q_{p5} + Q_{p15}}{2} + 0.1 \cdot Q_{ma}$$

5.2. Modelos hidro-biológicos o de simulación de hábitat.

Los métodos de modelación de la idoneidad de hábitat se basan en la simulación hidráulica, acoplada al uso de curvas de preferencia del hábitat físico para la especie o especies objetivo, obteniéndose curvas que relacionen el hábitat potencial útil con el caudal en los tramos seleccionados. Para el desarrollo de estos métodos se empleará la metodología IFIM (Instream Flow Incremental Methodology), que analiza las diferentes condiciones hidráulicas que se producen en un cauce al variar los caudales circulantes, relacionando además las preferencias de las especies seleccionadas mediante el uso de curvas, y obteniendo finalmente una relación entre el caudal circulante y el hábitat disponible para la especie.

El esquema conceptual de la metodología de modelización del hábitat combina dos factores fundamentales: las curvas de preferencia de la fauna potencial y las condiciones físicas del hábitat. Integrando el modelo hidráulico (que simula las condiciones de los distintos segmentos del río en cuanto a niveles y velocidades, en función de los caudales circulantes) y el valor potencial del hábitat fluvial (que indica la idoneidad de dichas condiciones para las especies que pueden estar presentes), se llega al concepto del Hábitat Potencial Útil (HPU), herramienta con la que se planteará el régimen ambiental de caudales. Para las correspondientes modelizaciones, se aplicará el programa Rhyhabsim (Ian G. Jowett, NIWA, NZ). En la Figura 15 se presentan un ejemplo de curvas de preferencia para la trucha común (*salmo trutta*), donde se pueden observar las diferencias entre alevines y adultos.

La aplicación de este método requiere un conocimiento preciso de la geometría y características hidráulicas de los tramos donde es aplicado. En este caso, se han realizado campañas de campo específicas, en el marco del proyecto, para caracterizar las secciones, pendiente hidráulica, velocidades y caudales en un punto representativo del Tebicuary-Mi, en concreto en las cercanías de la localidad de Iturbe. Además, se dispone como información de partida, de datos similares en el río Tebicuary a la altura de Villa Florida.

La descripción de los métodos y resultados de la campaña de campo realizada en el Tebicuary-Mi (Iturbe) es objeto de un documento específico dentro del proyecto.

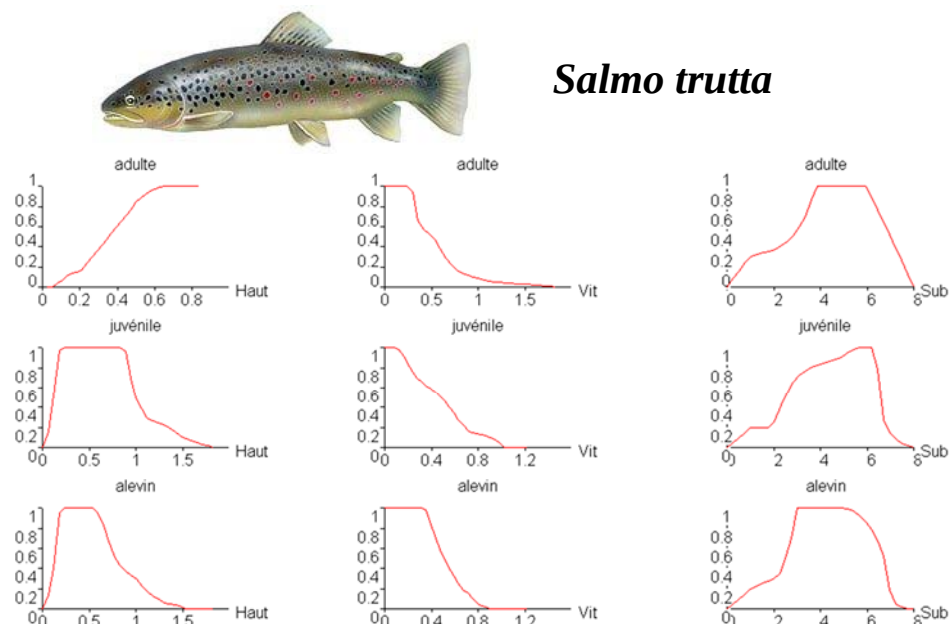


Figura 15. Curvas de preferencia obtenidas para la trucha común en diferentes estadios de desarrollo.

Las especies representativas que se han elegido para determinar el HPU, tras conversaciones con los agentes implicados y a la vista de las capturas registradas en los principales puertos fluviales, son las siguientes (nombre común):

- Suribí (pintado y atrigrado)
- Dorado
- Carimbatá o Sábalo

Dada la falta de información específica sobre estas especies, sus curvas de preferencia serán estimadas por criterios biológicos, a partir de datos de otras especies mejor conocidas.

6. CONCLUSIONES

En este documento se han presentado los métodos y herramientas seleccionadas para la obtención de los caudales ambientales en la cuenca del río Tébicuary que han sido escogidos en función de los datos disponibles presentados y analizados en el informe 3.1 – *Inventario y análisis de la información disponible*.

Además se presentan algunos resultados intermedios necesarios para la obtención de los caudales ambientales con los métodos seleccionados como son: (i) la obtención de las series de precipitación y ETP para cada una de las subcuencas en que se divide el área de estudio (ver capítulo 3, Informe 3.1) y (ii) el análisis del efecto del cambio climático en la cuenca.

Para la obtención de las series de precipitación se han calibrado los datos del proyecto TRMM (140 puntos) con los datos instrumentales disponibles y se han promediado para cada subcuenca. Para su calibración se han realizado dos correcciones, una en tiempo (se ha adelantado 1 día la señal del TRMM) y una en magnitud (mediante factores de corrección mensuales).

Para el análisis del cambio climático se han empleado los resultados de la base de datos Earth Exchange Global Daily Downscaled Projections (NEX-GDDP) para generar series de precipitación para el periodo 2041-2070 y para dos escenarios de cambio climático RCP4.5 y RCP8.5. En cuanto a los resultados obtenidos se observa que la precipitación experimentará un aumento moderado en la cuenca, sobre todo en la zona sureste y especialmente para la RCP 8.5. Sin embargo, la nueva precipitación se producirá en un número menor de días al año, lo que hace pensar en tormentas más cortas o menos frecuentes, y de mayor intensidad. En cuanto a la ETP, se detecta también un aumento derivado de unas temperaturas más altas, que es más significativo en el RCP 8.5.

Para la obtención de las series de caudales en cada una de las subcuencas, tanto para la situación actual como para los escenarios futuros considerados, se ha construido un modelo *ad hoc* de la cuenca del río Tébicuary, combinando un modelo hidrológico agregado, el denominado modelo de equilibrio logístico o LEM (por sus siglas en inglés), con un modelo de propagación basado en la ecuación de onda difusiva (ecuación de Hayami). El motivo de esta decisión es reducir al máximo los parámetros necesarios para reproducir los rasgos principales del comportamiento de la cuenca, y a ser posible conseguir que dichos parámetros tengan un sentido físico y puedan extrapolarse con ciertas garantías a subcuencas donde no hay datos de aforos, que son mayoría en el Tébicuary. El modelo propuesto, que se denominará LEM-DW (Logistic Equilibrium Model with Diffusive Wave), es un modelo agregado conceptual que se basa en discretizar la cuenca completa en un conjunto de elementos o unidades hidrológicas (subcuencas) dispuestas en forma de árbol, según la topología de la red.

Por último se han seleccionado en función de los datos disponibles (informe 3.1) se han decidido aplicar métodos hidrológicos e hidrobiológicos para la obtención de los caudales ambientales. Entre los métodos hidrológicos seleccionados destaca el método de Palau, que define el "Caudal básico de mantenimiento" como el caudal que hay que dejar en un río aguas abajo de cada aprovechamiento de regulación o derivación para mantener un

nivel admisible de desarrollo de la vida acuática. Además se aplicaran otros métodos hidrológicos alternativos (valores medios de los mínimos anuales de la media móvil de 21 y 25 días, percentiles del 5 y 15% de la curva de caudales acumulados y caudal equivalente al 10% del caudal medio interanual) y, en última instancia, se ha propuesto un caudal ambiental medio, ponderando con diferentes pesos los resultados.

En cuanto al método hidrobiológico, se ha seleccionado la metodología IFIM (Instream Flow Incremental Methodology) que analiza las diferentes condiciones hidráulicas que se producen en un cauce al variar los caudales circulantes, relacionando además las preferencias de las especies seleccionadas mediante el uso de curvas, y obteniendo finalmente una relación entre el caudal circulante y el hábitat disponible para la especie.

Los resultados de la aplicación de estos modelos se presentan en el informe 3.4 – *Aplicación de la herramienta propuesta para la definición de caudales ecológicos en la cuenca del río Tebicuary.*

APÉNDICE 1

RESULTADOS DE LA CALIBRACIÓN DE LOS DATOS DE PRECIPITACIÓN

1. CALIBRACIÓN TRMM

1.1. Pluviómetro 1

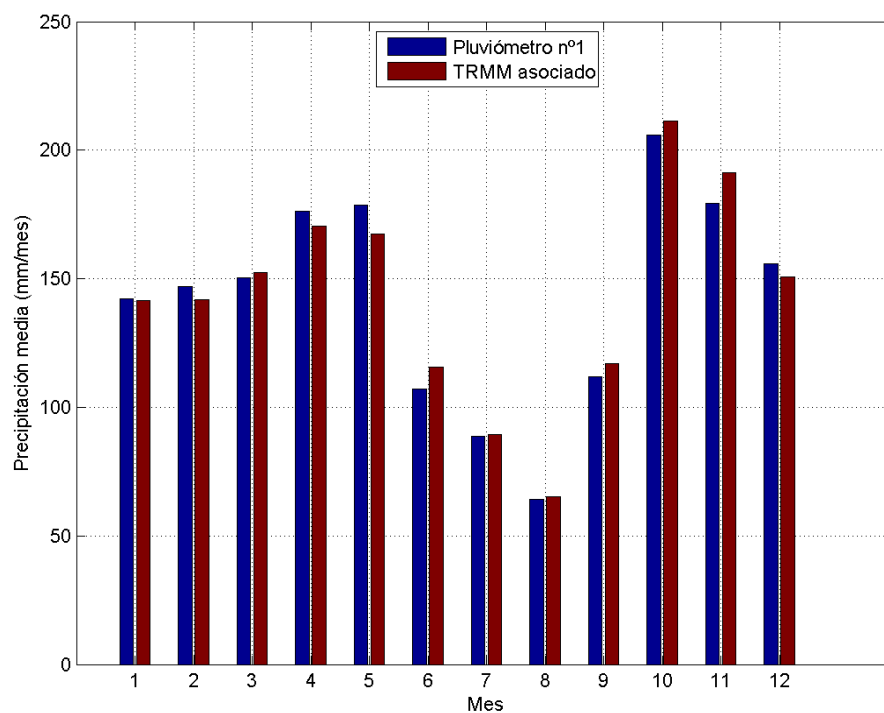


Figura 1. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 1.

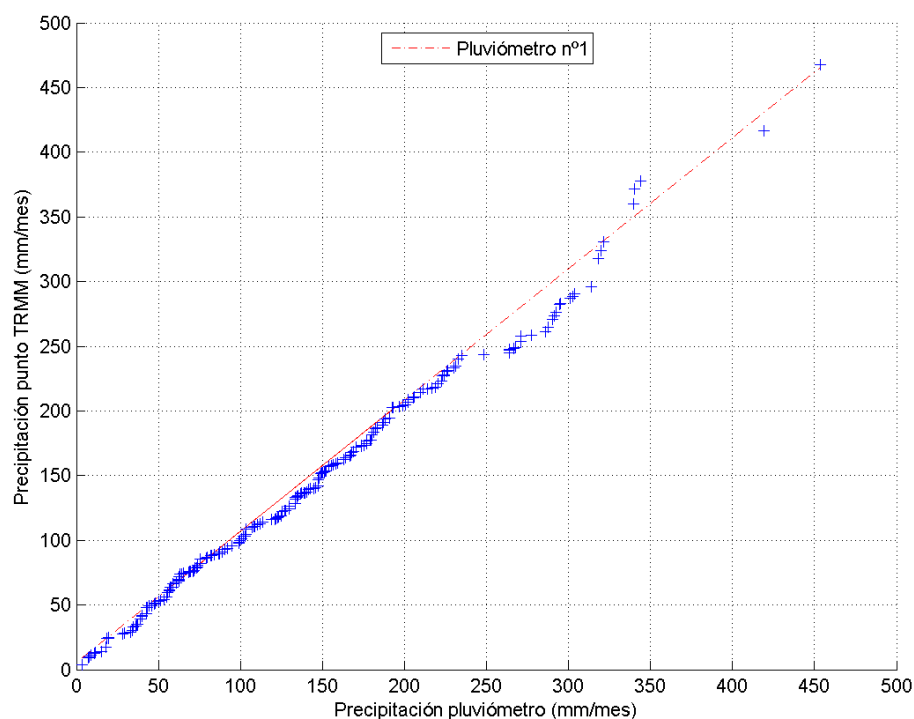


Figura 2. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 1. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

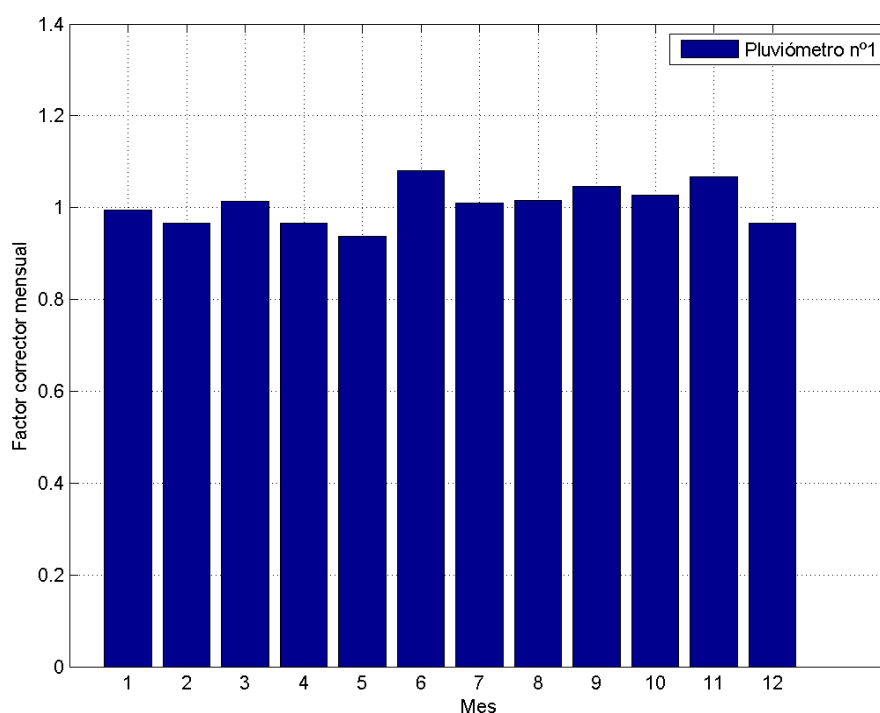


Figura 3. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 1. Factores correctores a escala mensual.

1.2. Pluviómetro 2

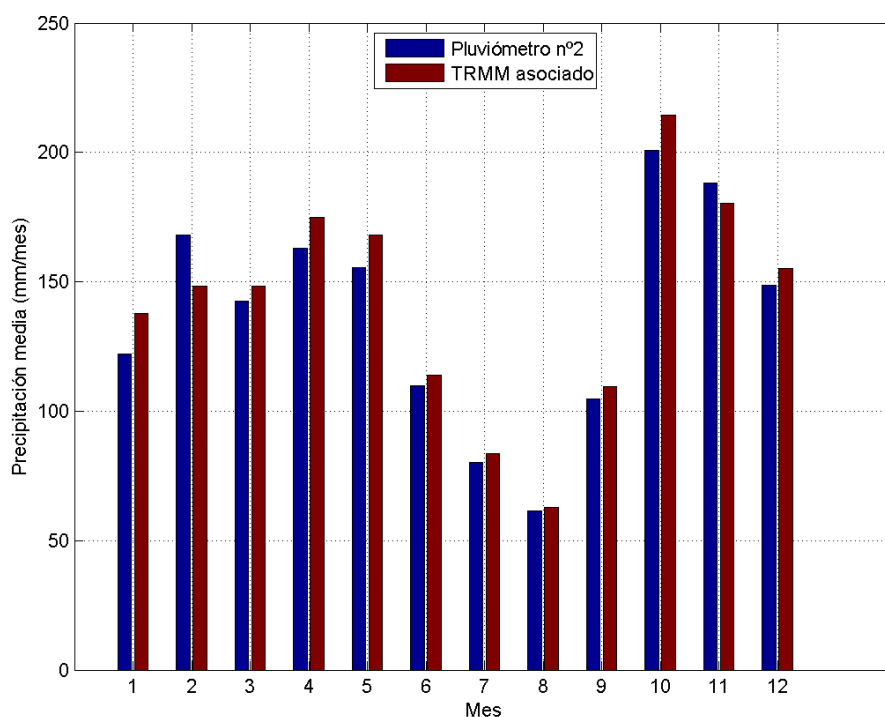


Figura 4. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 2.

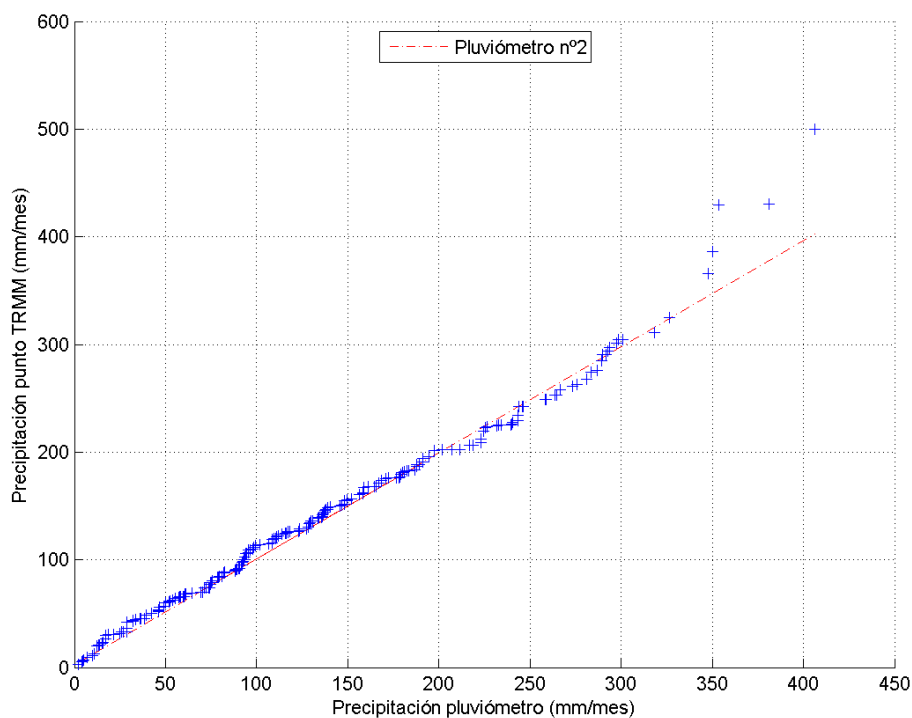


Figura 5. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 2. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

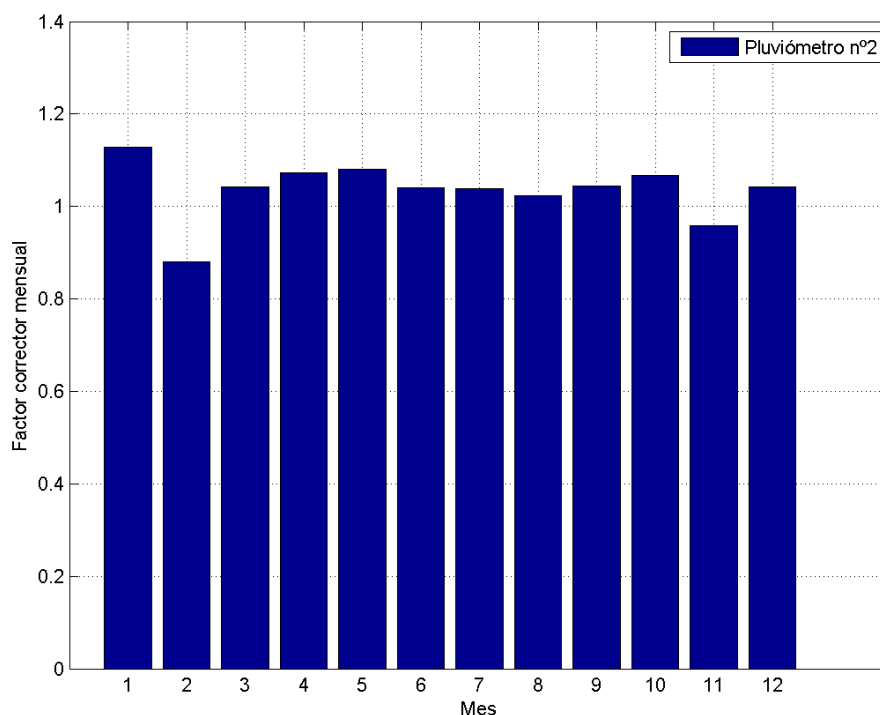


Figura 6. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 2. Factores correctores a escala mensual.

1.3. Pluviómetro 3

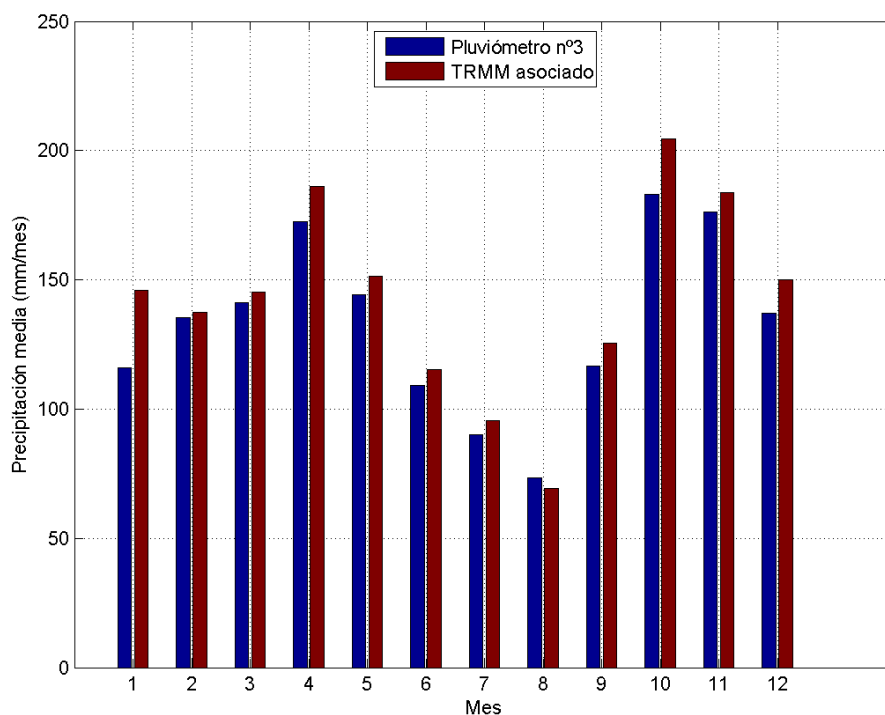


Figura 7. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 3.

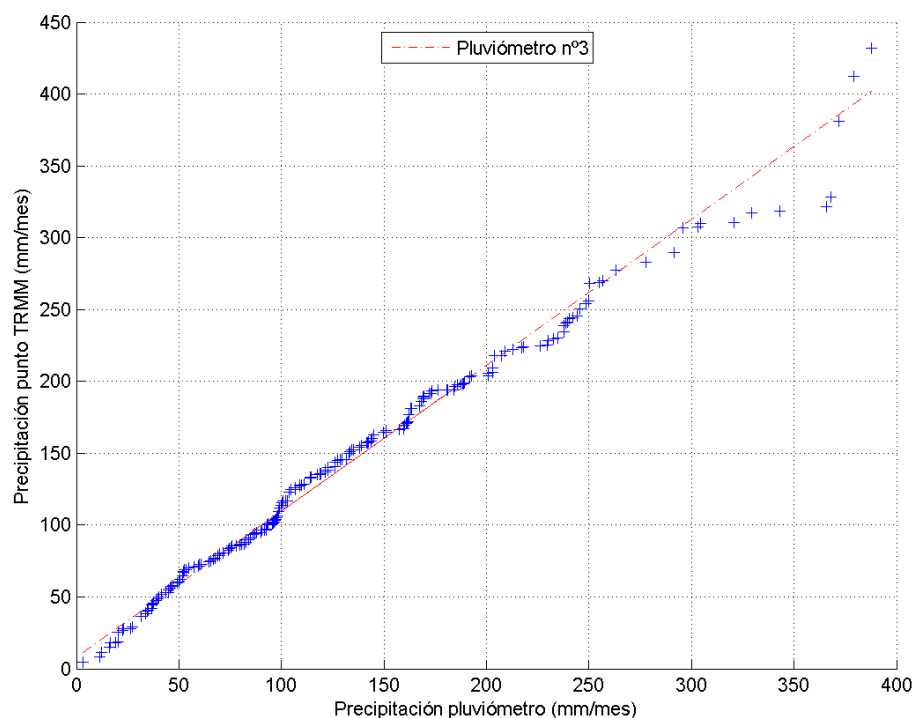


Figura 8. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 3. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

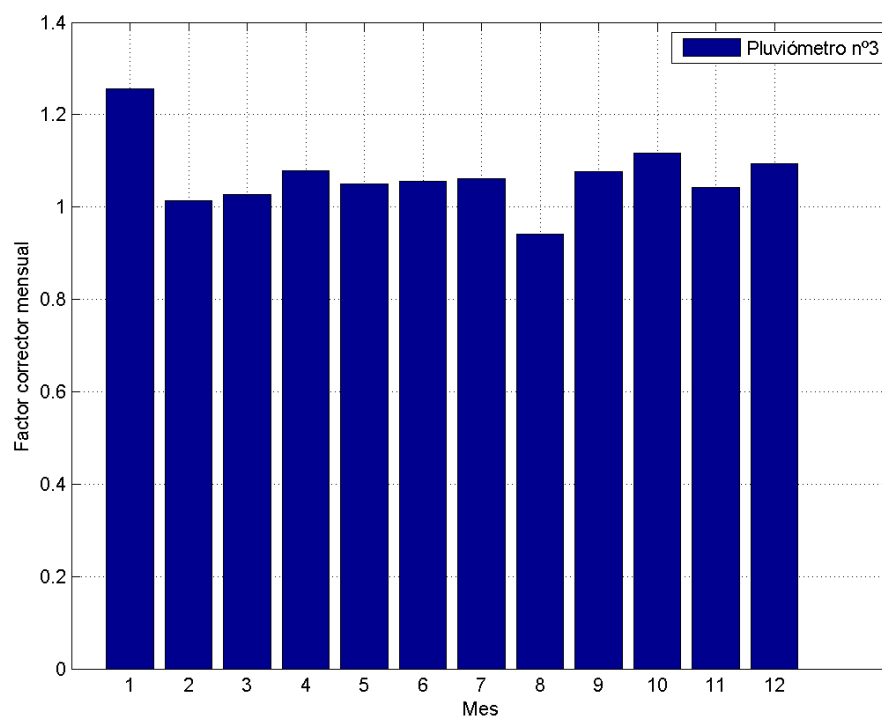


Figura 9. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro n° 3. Factores correctores a escala mensual.

1.4. Pluviómetro 4

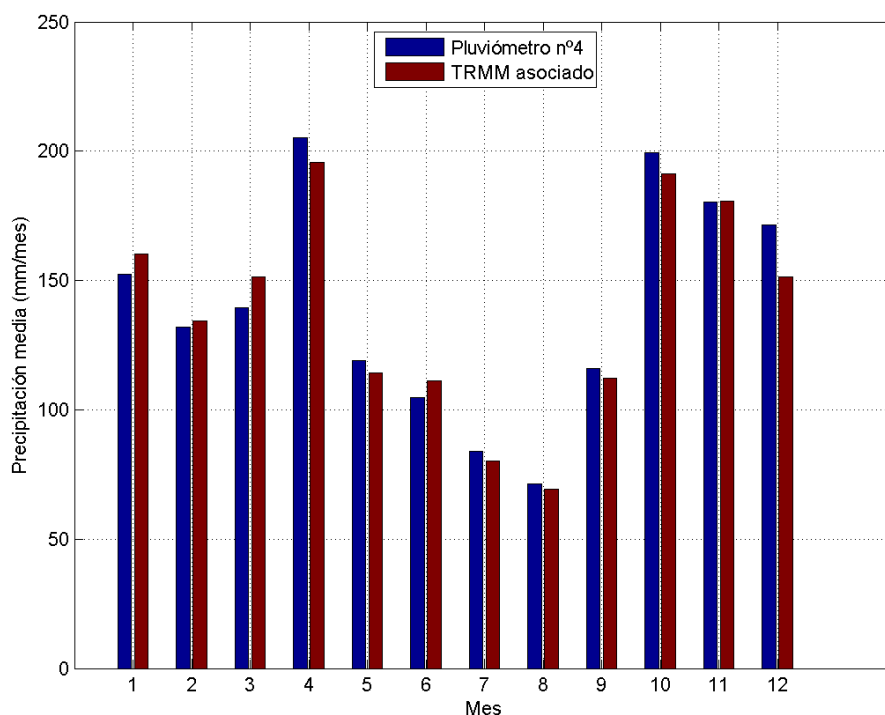


Figura 10. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 4.

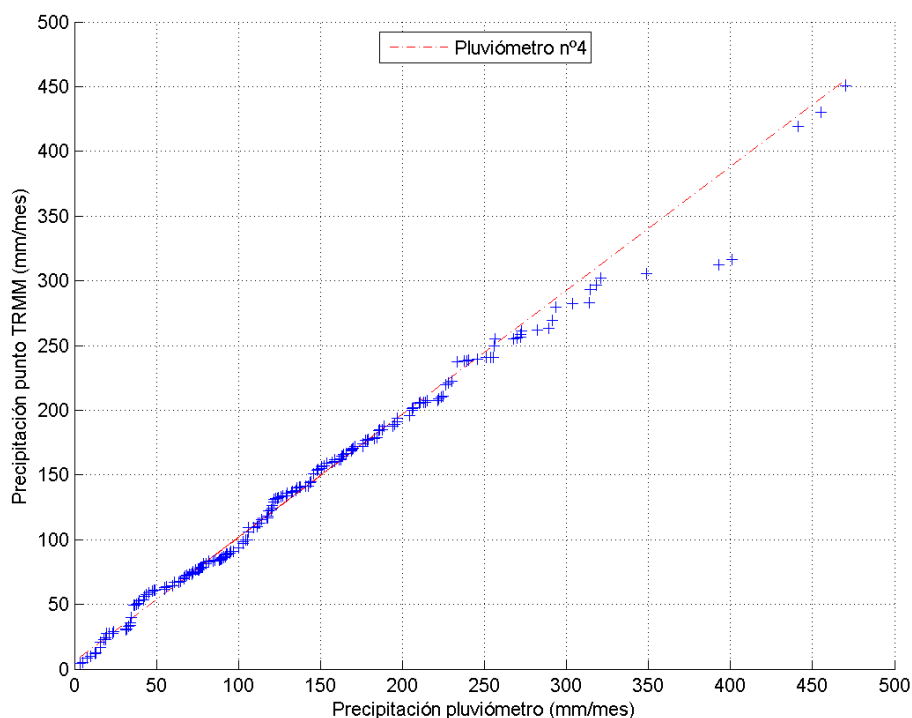


Figura 11. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 4. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

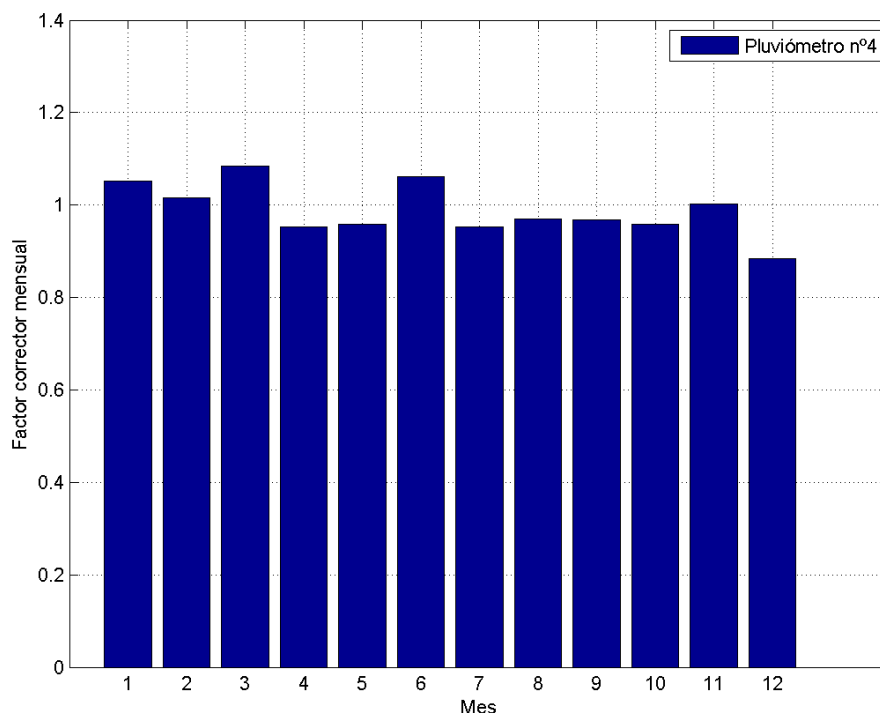


Figura 12. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 4. Factores correctores a escala mensual.

1.5. Pluviómetro 5

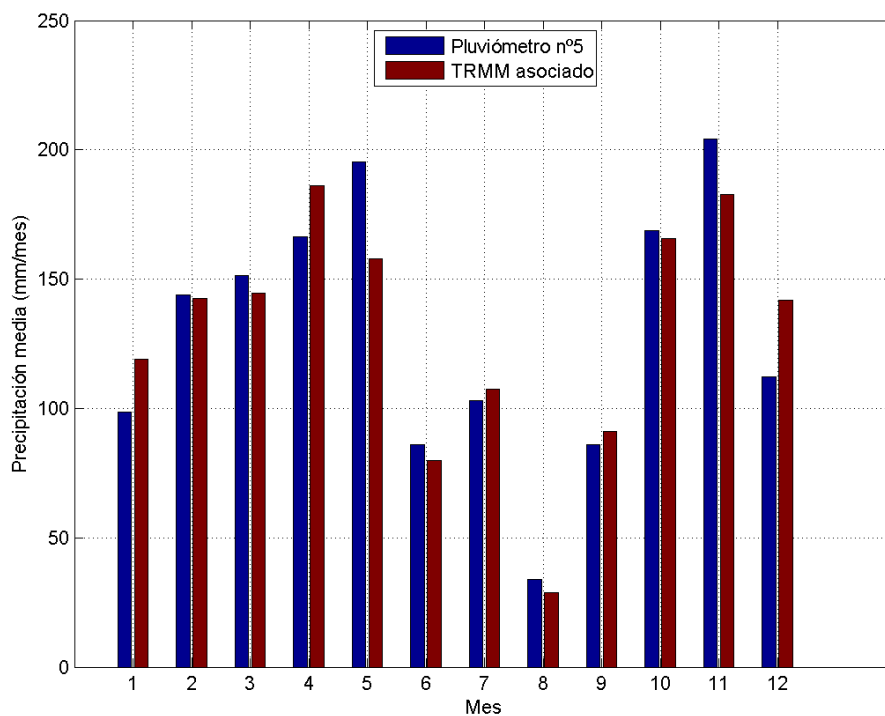


Figura 13. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 5.

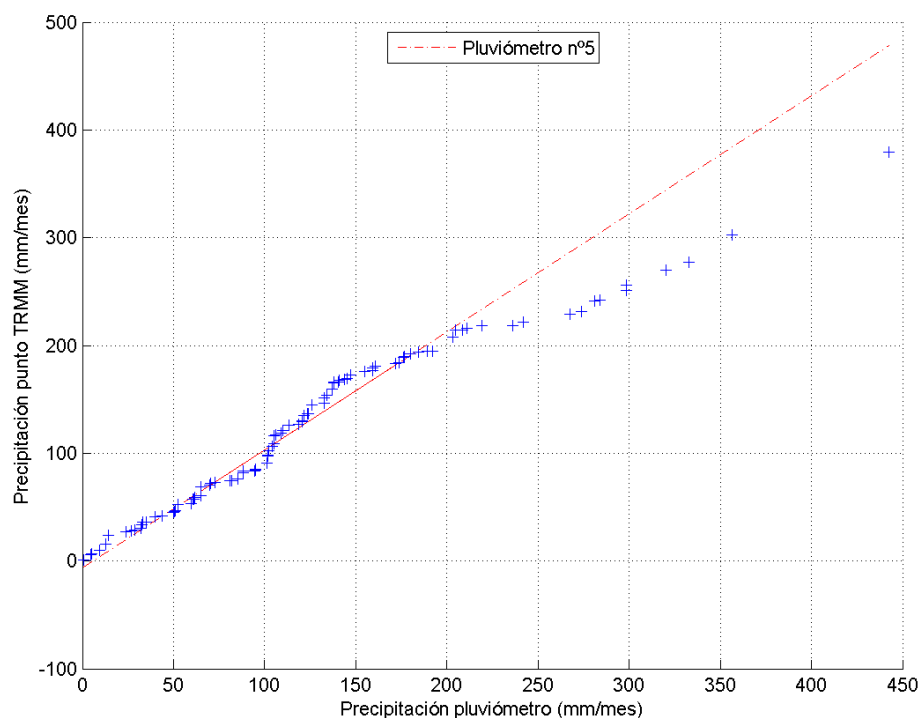


Figura 14. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 5. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

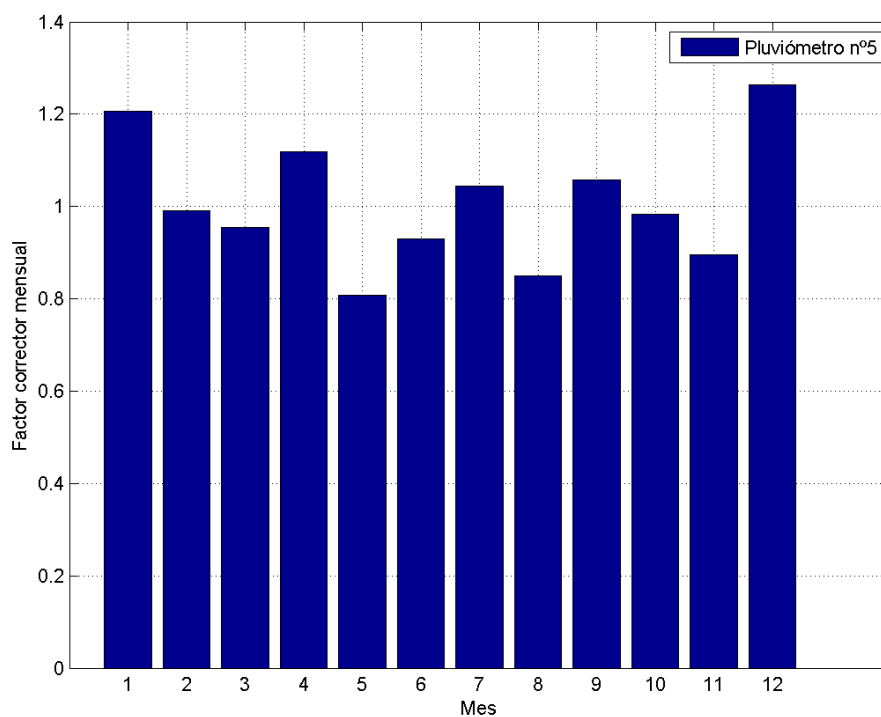


Figura 15. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 5. Factores correctores a escala mensual.

1.6. Pluviómetro 6

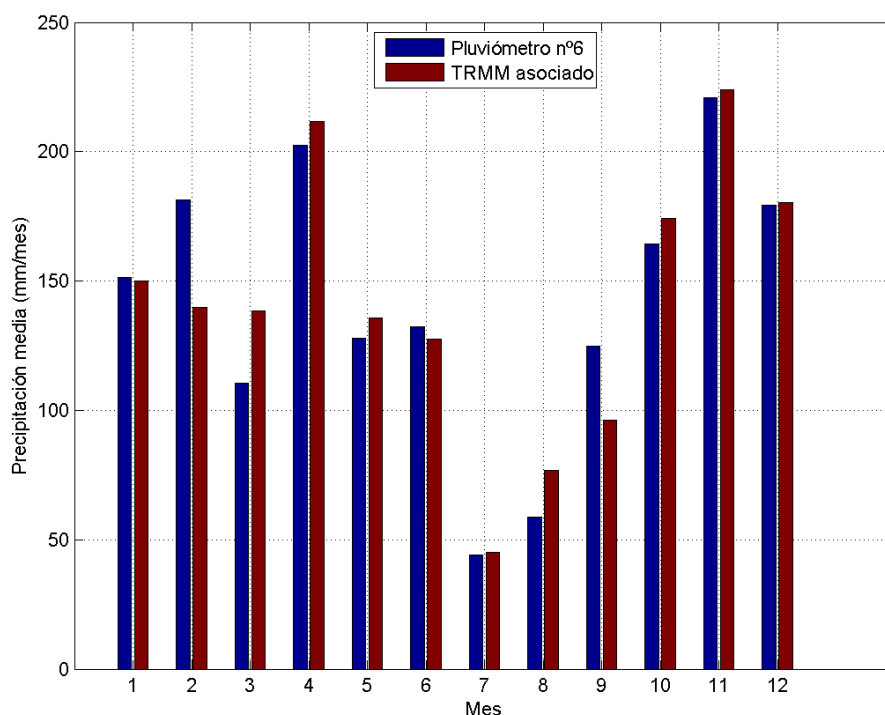


Figura 16. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 6.

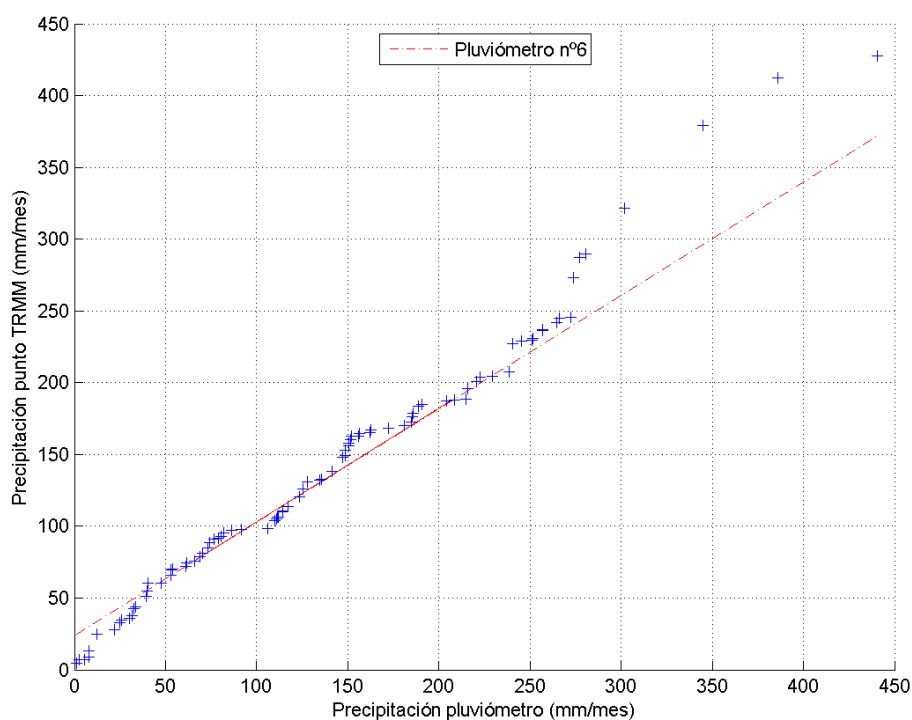


Figura 17. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 6. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

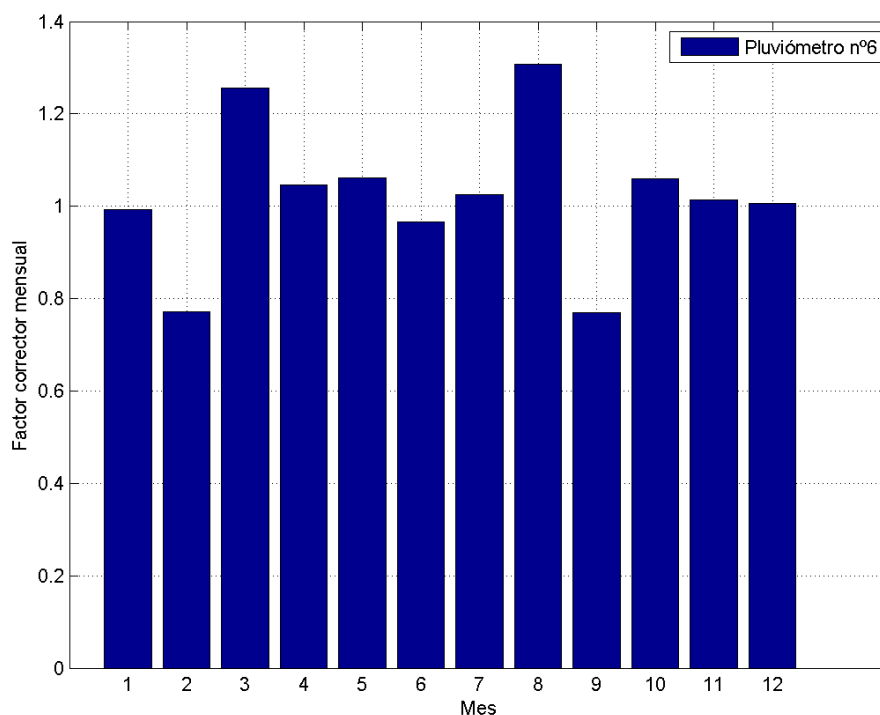


Figura 18. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 6. Factores correctores a escala mensual.

1.7. Pluviómetro 7

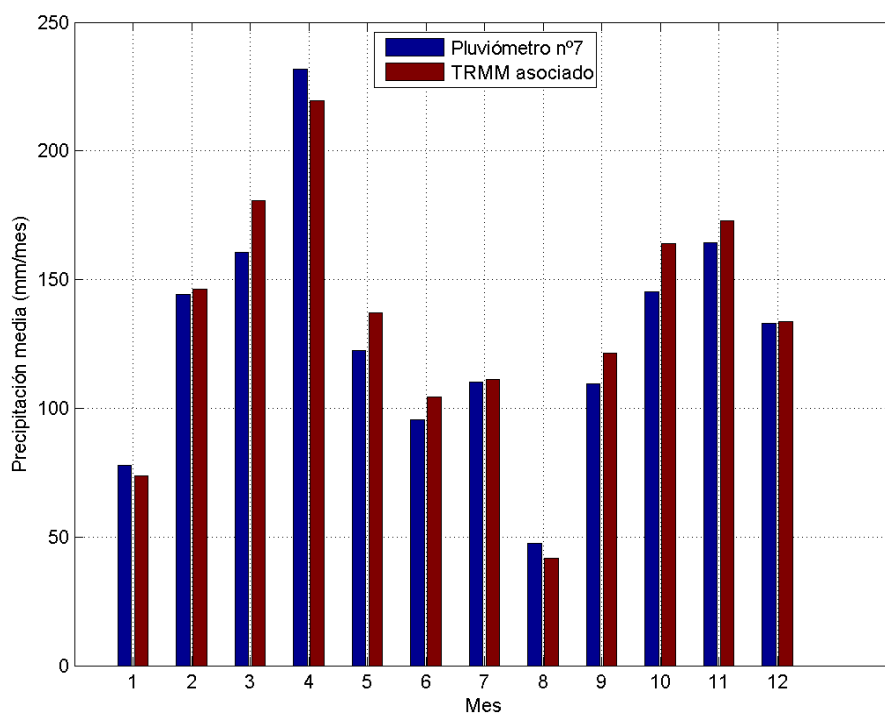


Figura 19. Comparación de valores de precipitación medios mensuales del TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 7.

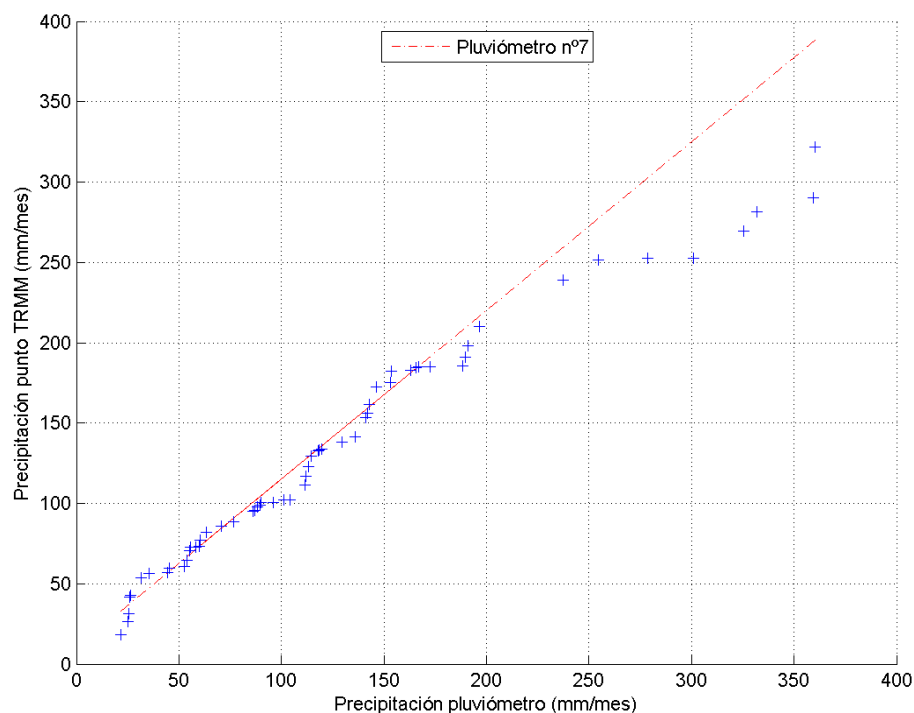


Figura 20. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 7. QQ-plot de ambas series a escala mensual.

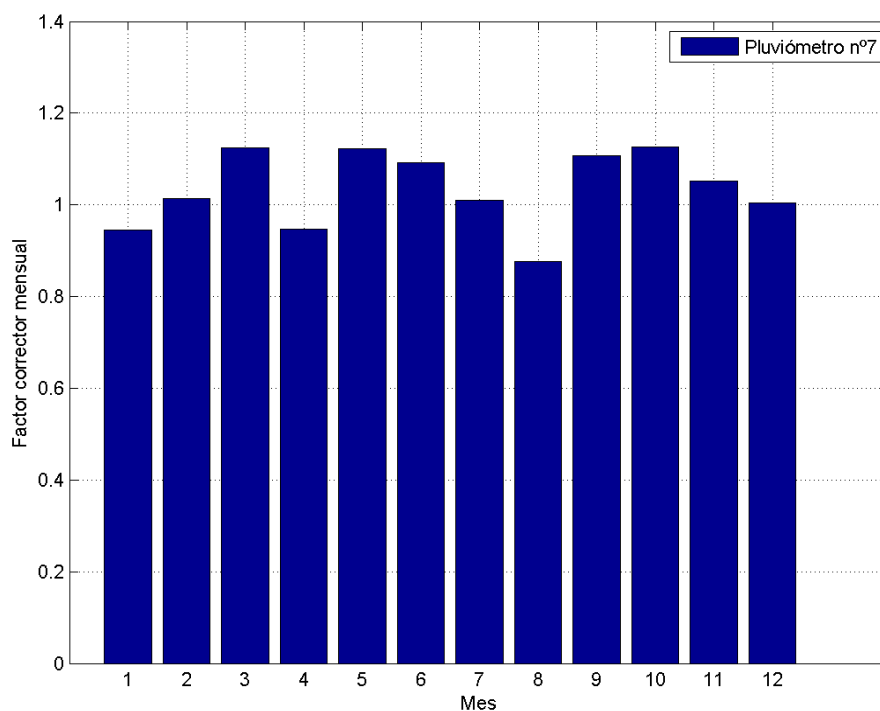


Figura 21. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 7. Factores correctores a escala mensual.

2. RESULTADOS POR SUBCUENCAS

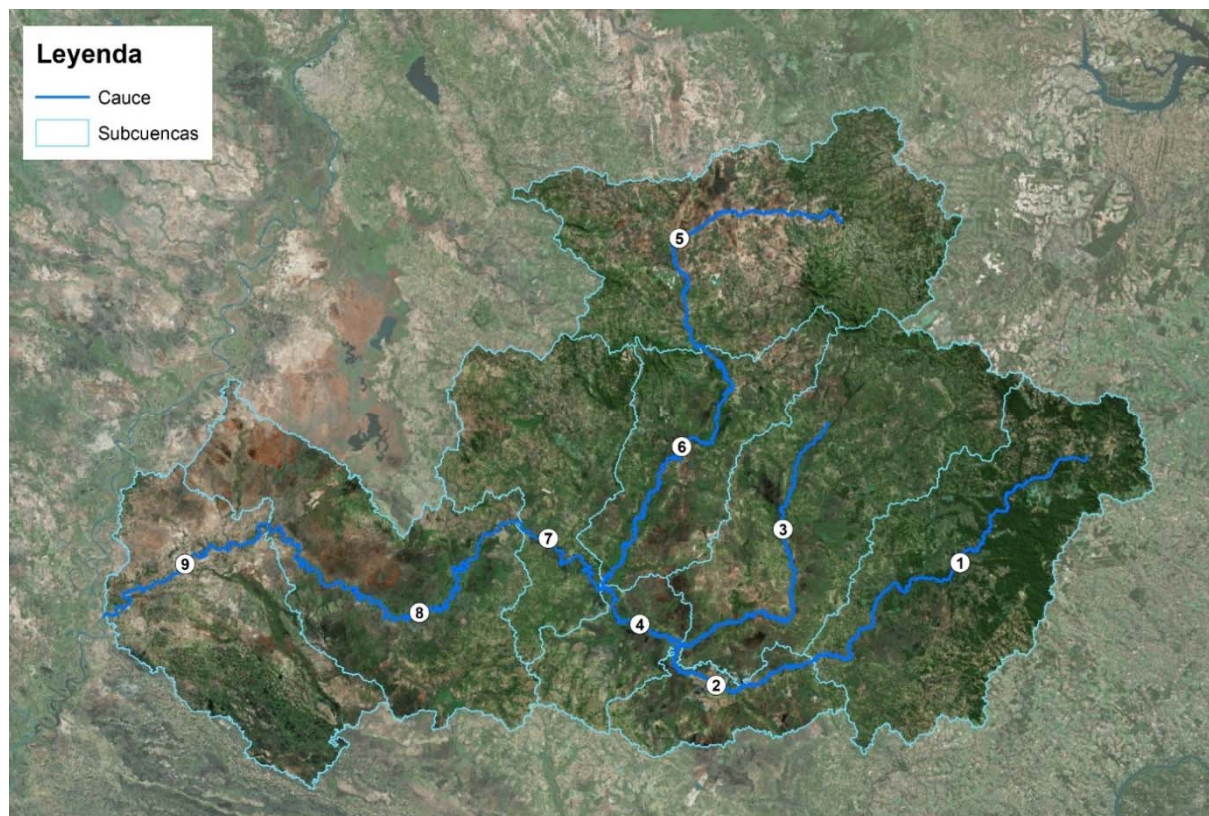


Figura 22. Comparación de datos de precipitación de TRMM e instrumentales para el pluviómetro nº 7. Factores correctores a escala mensual.

SUBCUENCA	NOMBRE EXTENSO-DESCRIPCIÓN
SC-1	Alto Tobicuary I (hasta Yuty aprox.)
SC-2	Alto Tobicuary II (hasta confluencia del Pirapó)
SC-3	Cuenca del Pirapó
SC-4	Medio Tobicuary I
SC-5	Alto Tobicuary Mi (hasta Iturbe aprox.)
SC-6	Bajo Tobicuary Mi
SC-7	Medio Tobicuary II (hasta Villa Florida)
SC-8	Bajo Tobicuary I
SC-9	Bajo Tobicuary II

Tabla 1. Hidrotoponimia utilizada en cada subcuenca.

2.1. Subcuenca 1

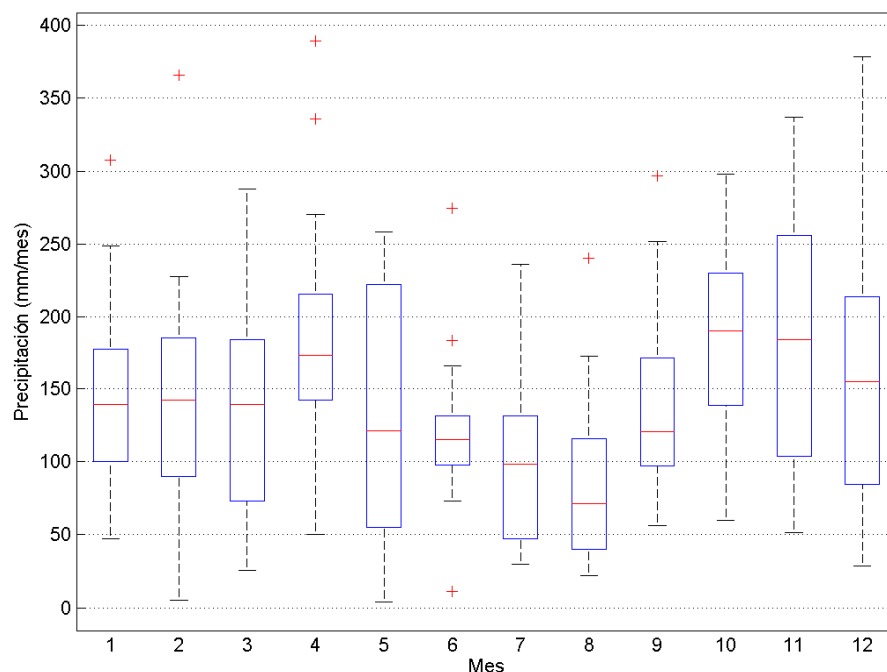


Figura 23. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 1.

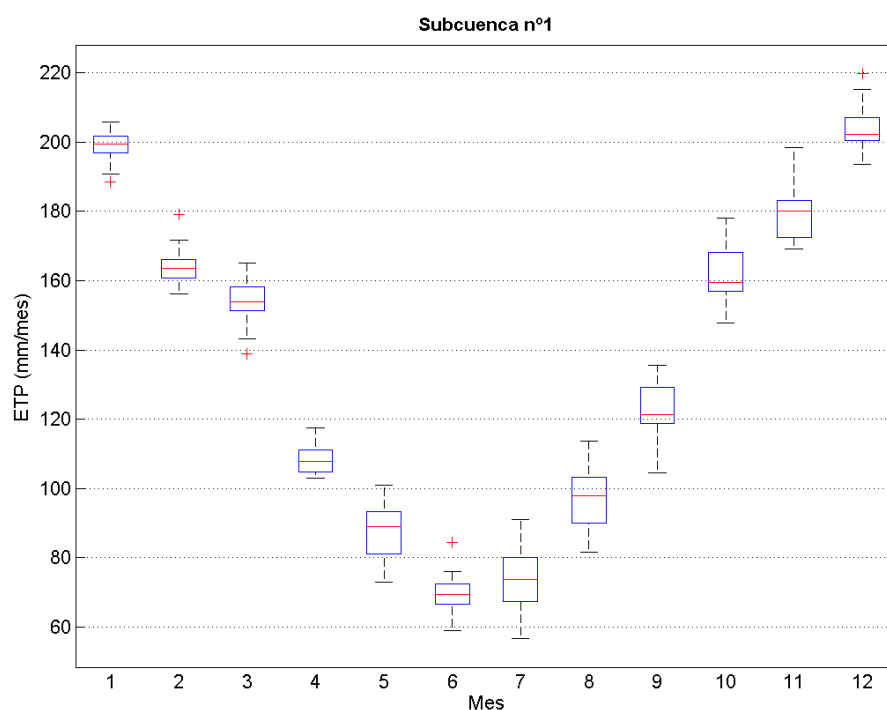


Figura 24. Rangos de valores de la ETP media mensual para la subcuenca nº 1.

2.2. Subcuenca 2

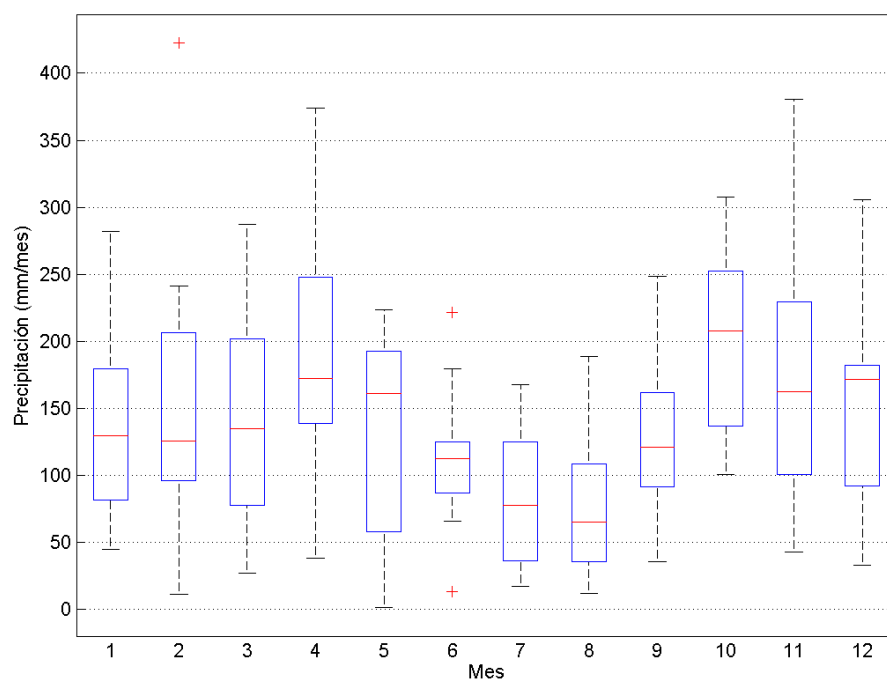


Figura 25. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 2.

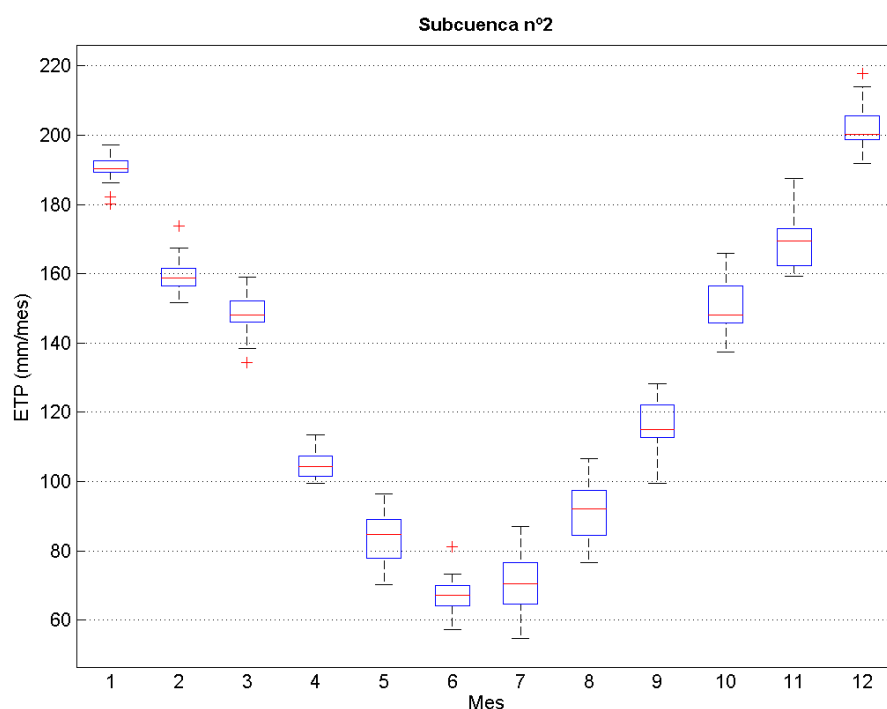


Figura 26. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 2.

2.3. Subcuenca 3

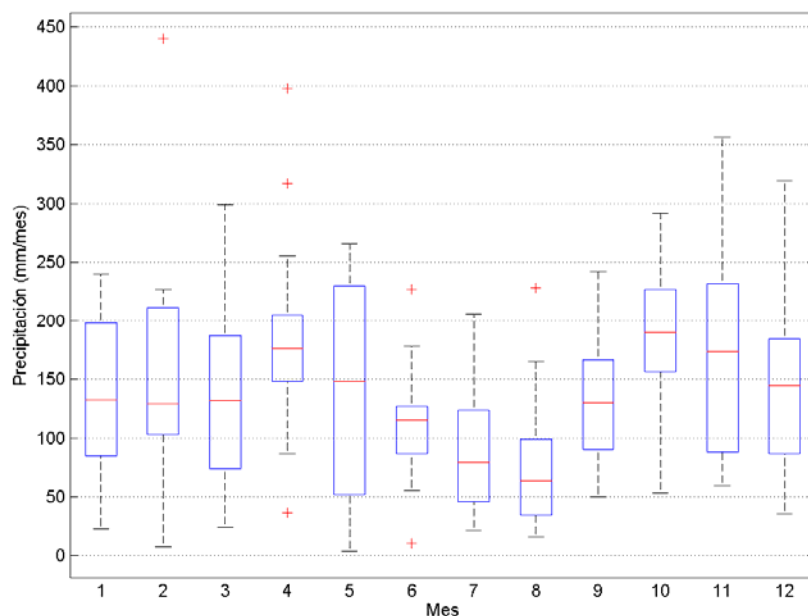


Figura 27. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 3.

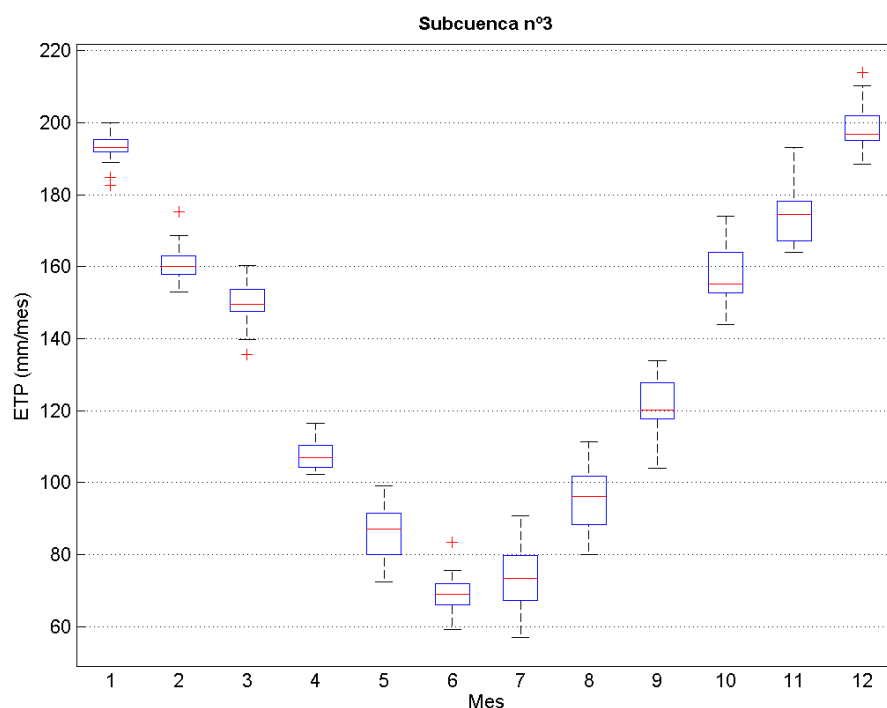


Figura 28. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 3.

2.4. Subcuenca 4

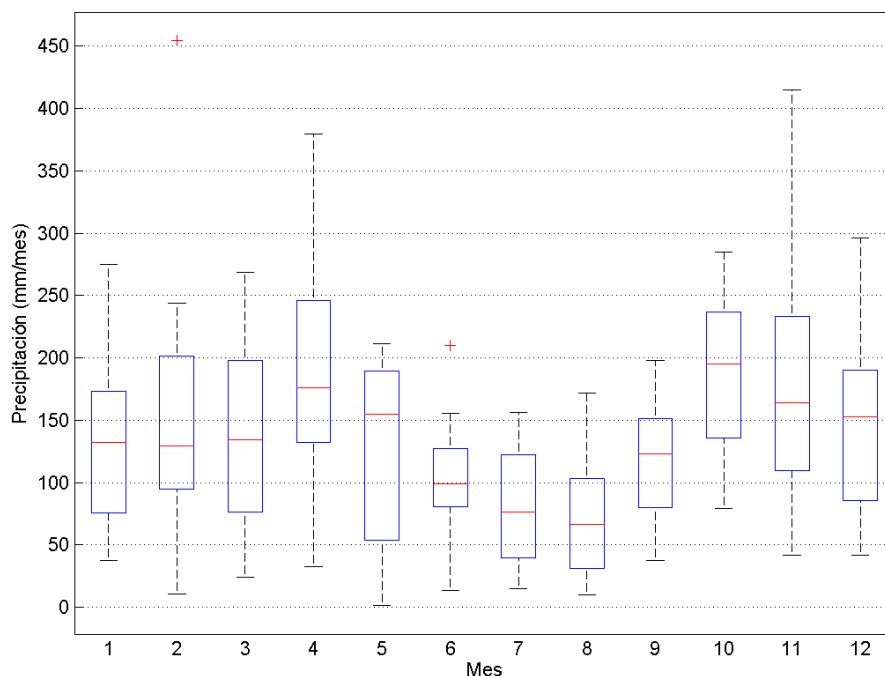


Figura 29. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 4.

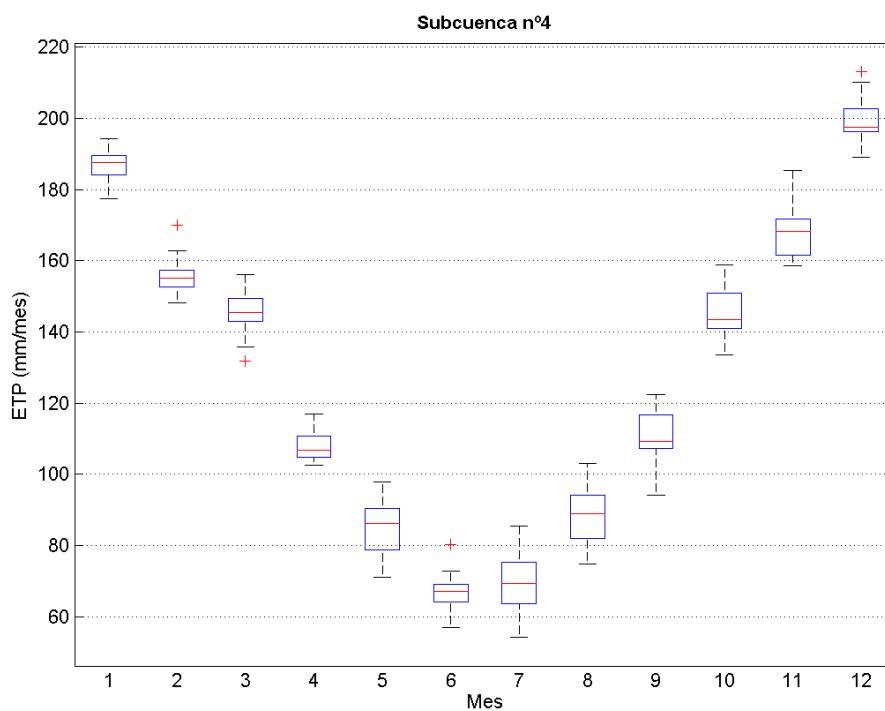


Figura 30. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 4.

2.5. Subcuenca 5

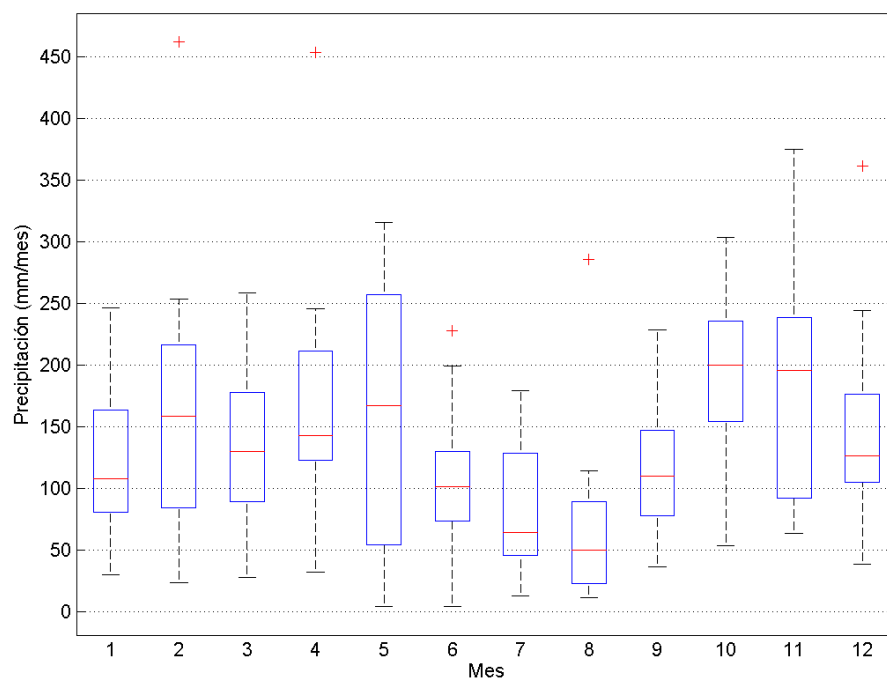


Figura 31. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 5.

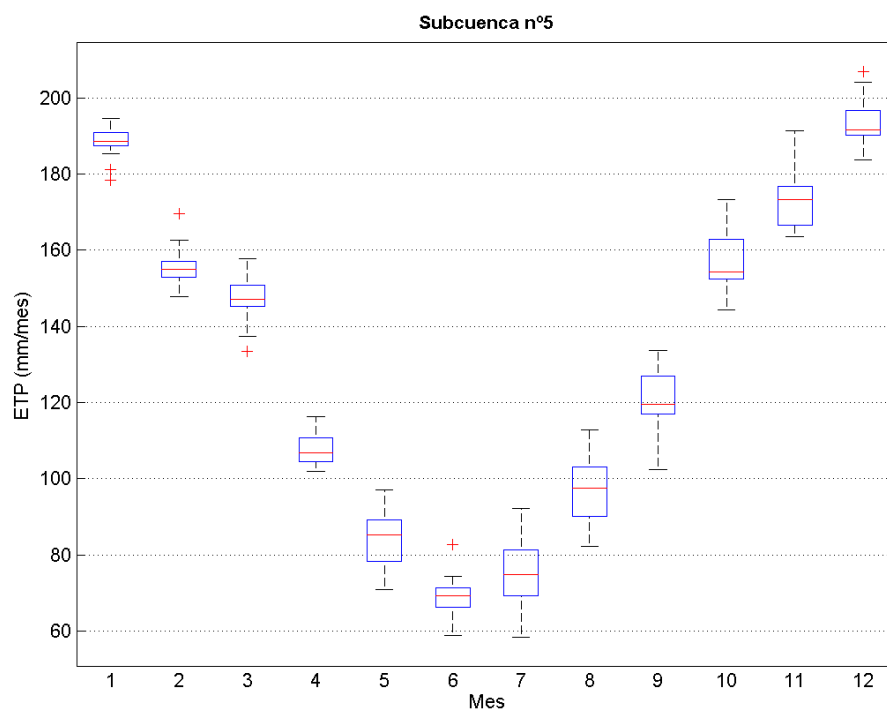


Figura 32. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 5.

2.6. Subcuenca 6

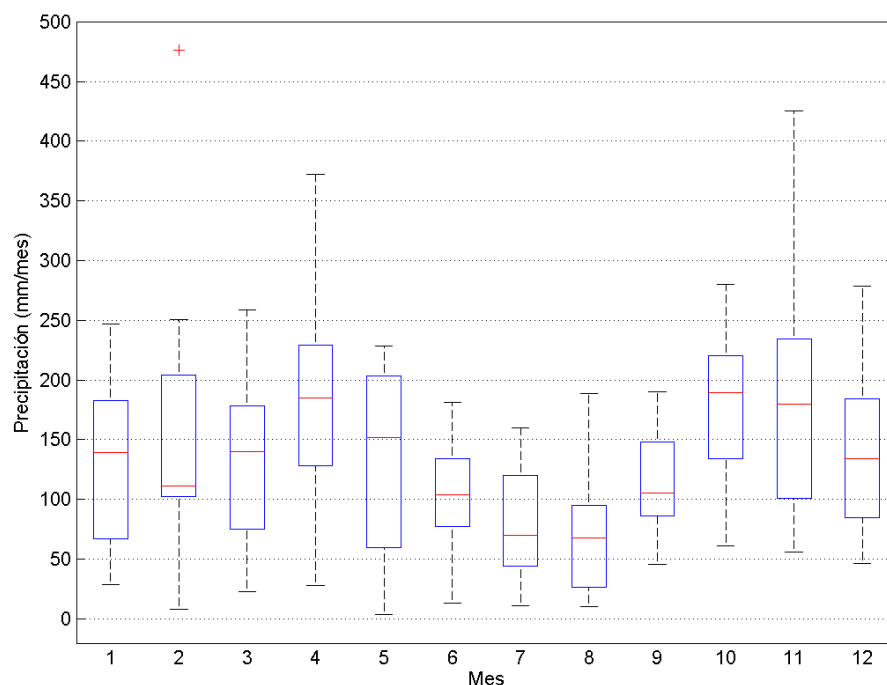


Figura 33. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 6.

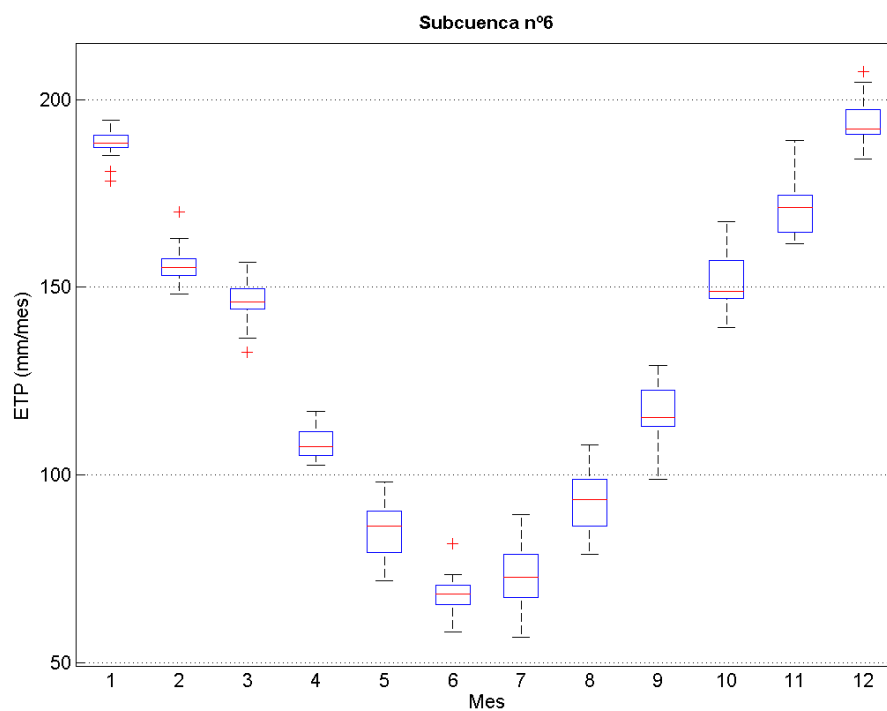


Figura 34. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 6.

2.7. Subcuenca 7

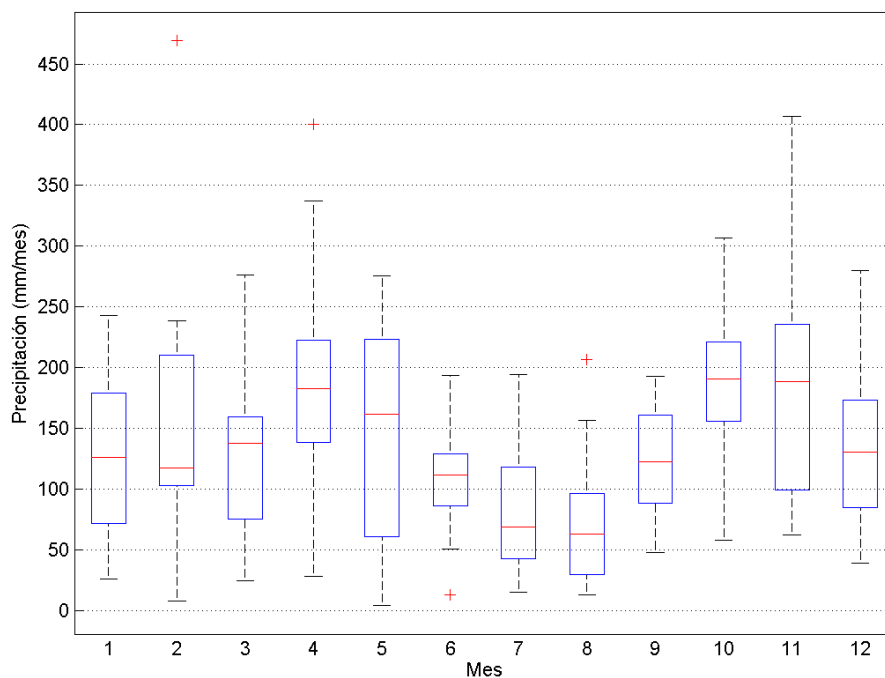


Figura 35. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 7.

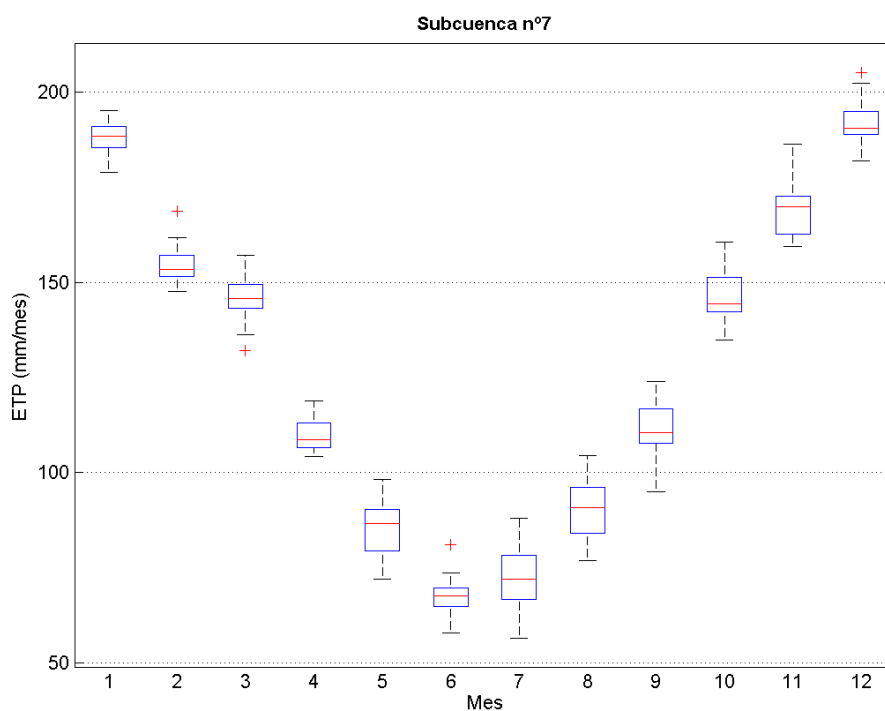


Figura 36. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 7.

2.8. Subcuenca 8

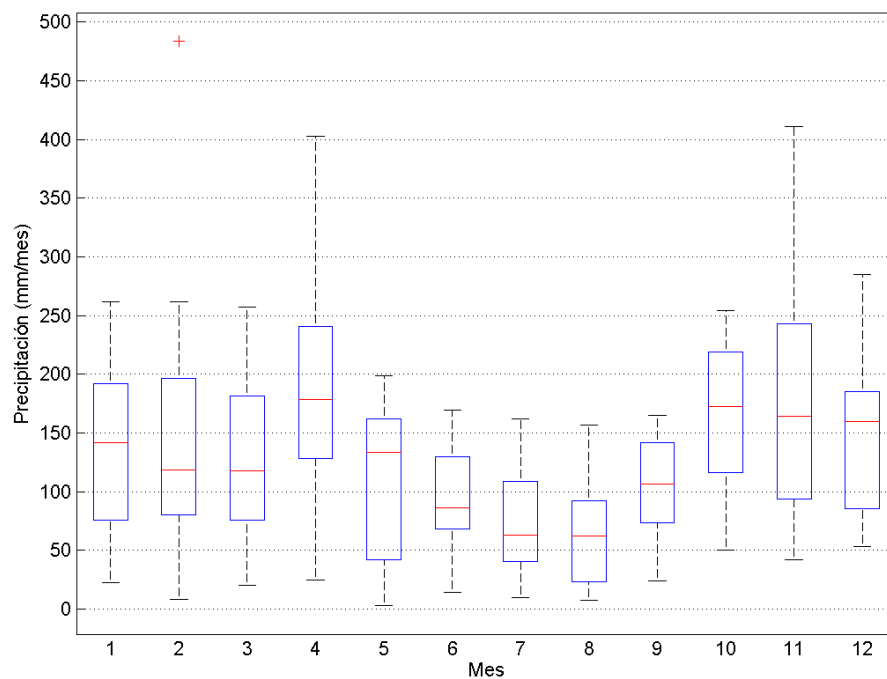


Figura 37. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 8.

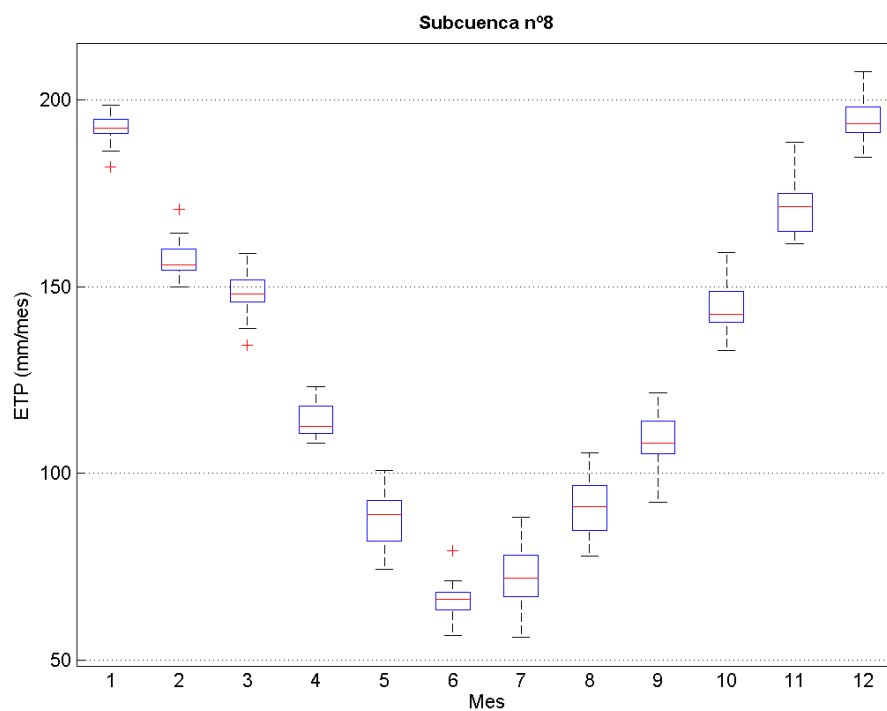


Figura 38. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 8.

2.9. Subcuenca 9

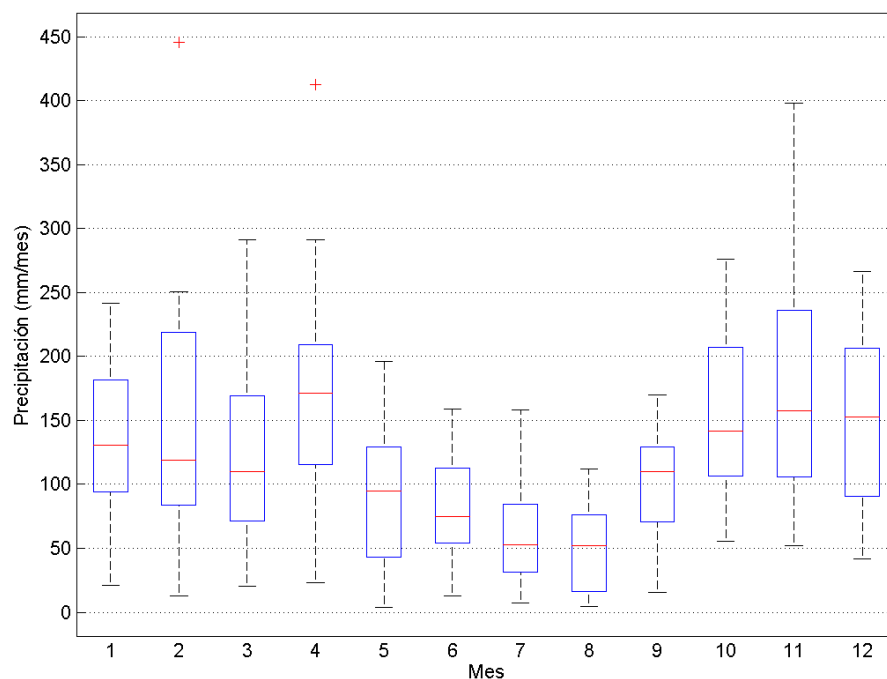


Figura 39. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 9.

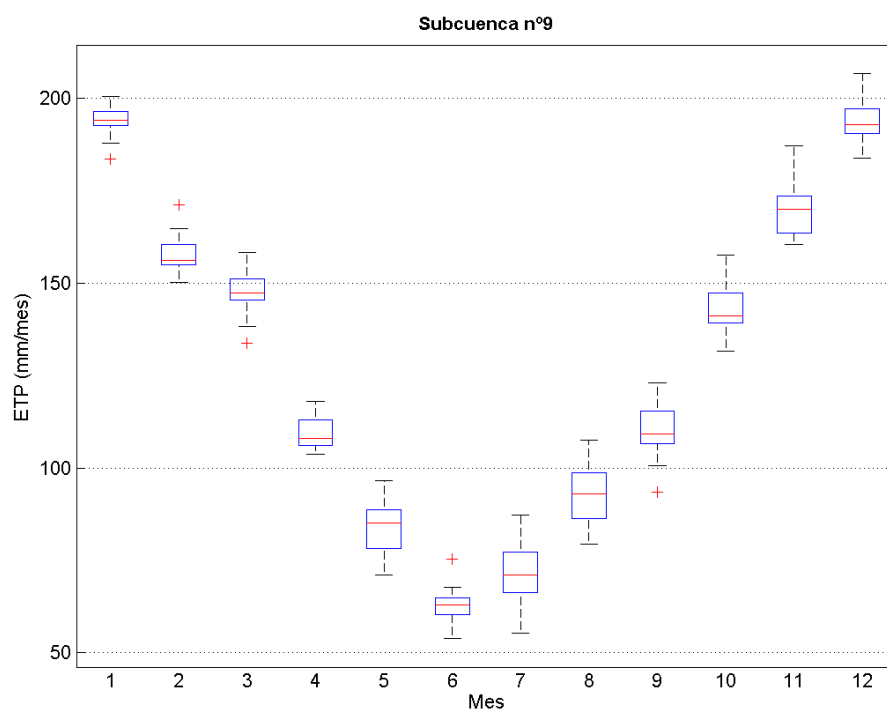


Figura 40. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la subcuenca nº 9.

2.10. Cuenca del Tebicuary

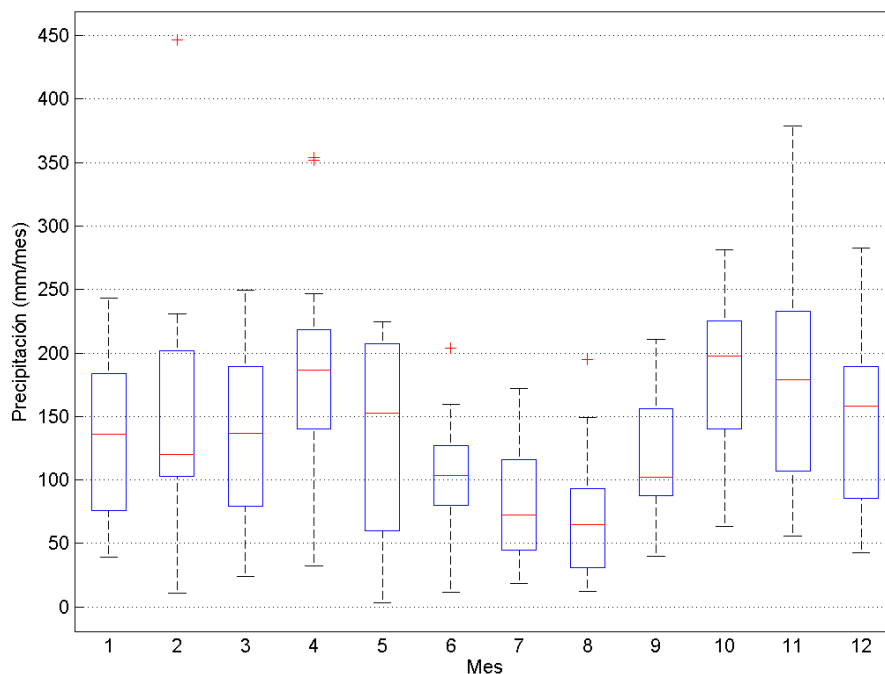


Figura 41. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la cuenca del Tebicuary.

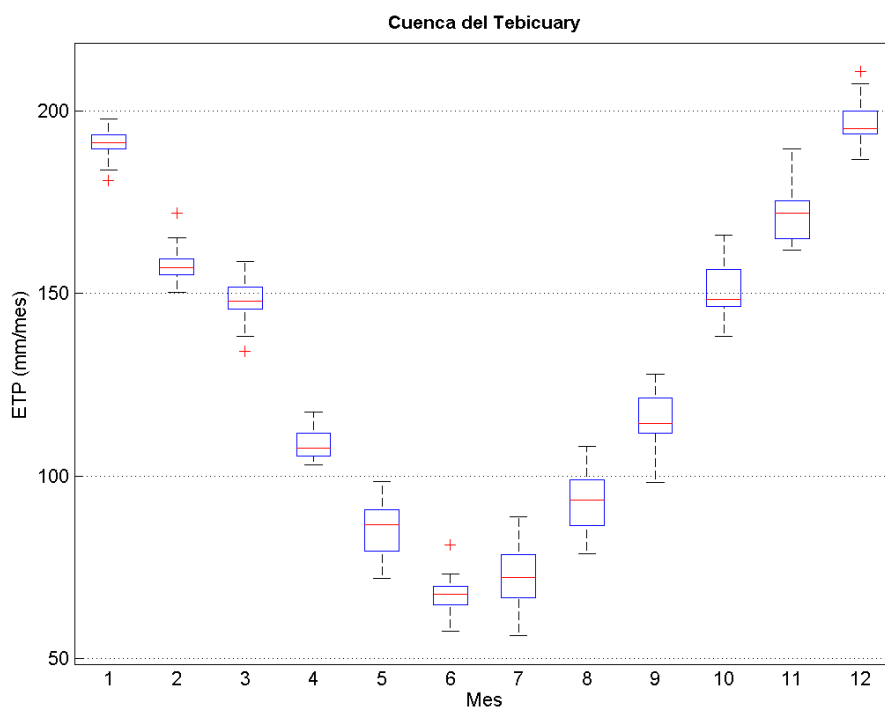


Figura 42. Rangos de valores de la precipitación media mensual para la cuenca del Tebicuary.

APÉNDICE 2

ANALYTICAL HAYAMI SOLUTION FOR THE DIFFUSIVE WAV FLOOD ROUTING PROBLEM WITH LATERAL INFLOW

ROGER MOUSSA, 2016

ANALYTICAL HAYAMI SOLUTION FOR THE DIFFUSIVE WAVE FLOOD ROUTING PROBLEM WITH LATERAL INFLOW

ROGER MOUSSA

Institut National de la Recherche Agronomique, UR Science du Sol, 2 Place Pierre Viala, 34060 Montpellier Cedex 1, France

ABSTRACT

The diffusive wave equation is generally used in flood routing in rivers. The two parameters of the equation, celerity and diffusivity, are usually taken as functions of the discharge. If these two parameters can be assumed to be constant without lateral inflow, the diffusive wave equation may have an analytical solution: the Hayami model. A general analytical method, based on Hayami's hypothesis, is developed here which resolves the diffusive wave flood routing equation with lateral inflow or outflow uniformly distributed over a channel reach. Flood routing parameters are then identified using observed inflow and outflow and the Hayami model used to simulate outflow. Two examples are discussed. Firstly, the prediction of the hydrograph at a downstream section on the basis of a knowledge of the hydrograph at an upstream section and the lateral inflow. The second example concerns lateral inflow identification between an upstream and a downstream section on the basis of a knowledge of hydrographs at the upstream and downstream sections. The new general Hayami model was applied to flood routing simulation and for lateral inflow identification of the River Allier in France. The major advantages of the method relate to computer simulation, real-time forecasting and control applications in examples where numerical instabilities, in the solution of the partial differential equations must be avoided.

KEY WORDS flood routing; lateral inflow; analytical solutions; diffusive wave

INTRODUCTION

Saint-Venant (1871) formulated the system of partial differential equations that allows a study of one-dimensional, gradually varied, unsteady flow. The solution of the Saint-Venant system, which constitutes a system of hyperbolic quasi-linear partial differential equations, has given rise to a number of numerical methods because no analytical solution was available. The solution methods are based either on the characteristic lines (Abbott, 1966) on finite difference schemes (Stoker, 1957; Dooge and Harley, 1967; Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980; Fread, 1985) or on finite element schemes (Cooley and Moin, 1976; Szymkiewicz, 1991). Comparisons of numerical solutions for the Saint-Venant equations have been published by Price (1974) and Greco and Panattoni (1977).

In most of the practical applications, the acceleration terms in the Saint-Venant equations can be neglected and the system is reduced to only one parabolic equation: the diffusive wave equation (Woolhiser and Liggett, 1967; Ponce and Simons, 1977; Ponce *et al.*, 1978; Katopodes, 1982; Daluz Viera, 1983; Ferrick *et al.*, 1984; Ferrick, 1985; Romanowicz *et al.*, 1988; Ponce, 1990). The two parameters of the equation, celerity and diffusivity, are taken as functions of the discharge. For this problem the boundary conditions are the upstream inflow and the lateral inflow. Methods based on the finite difference discretization techniques are generally used to calculate discharges (Crank and Nicholson, 1947; Richtmeyer and Morton, 1967; Remson *et al.*, 1971; Smith, 1978; Moussa and Bocquillon, in press). If the two parameters, celerity and diffusivity, can be assumed constant without lateral inflow, the diffusive wave equation may have an analytical solution: the Hayami (1951) linear model.

The first object of this paper is to develop an analytical method based on Hayami's hypothesis (celerity

and diffusivity constant), which resolves the diffusive wave flood routing equation with lateral inflow or outflow uniformly distributed over a channel reach. Two applications are proposed. Firstly, the prediction of the hydrograph at a downstream section on the basis of a knowledge of the hydrograph at an upstream section, the lateral inflow (or outflow) and the hydraulic characteristics of the channel between the two sections. The second example concerns the lateral inflow identification between an upstream and a downstream section on the basis of a knowledge of hydrographs at the upstream and downstream sections.

The second object is focused on the determination of the model parameters from the point of view of the application and on flood routing simulation. The River Allier basin in France (919 km²) was used for applications. Hydrographs are measured at an upstream and a downstream section. The methodology proposed needs three steps. The first step was to identify the two flood routing parameters celerity and diffusivity, by deconvolution of observed inflow and outflow hydrographs for flood events where lateral inflow could be neglected. The second step uses the identified parameters to estimate lateral inflow function for all flood events and in the last step a rainfall-runoff model is used to simulate lateral inflow and the Hayami model to route hydrographs to the downstream section.

DIFFUSIVE WAVE MODEL

General equation

The Saint-Venant equations result from combining the continuity equations for both mass and momentum at any cross-section within the flow. In most practical applications the acceleration terms in the momentum balance of the Saint-Venant equations can be neglected as they are small compared with the channel bed slope (Daluz Viera, 1983; Dooge and Harley, 1967; Henderson, 1963; 1966). We obtain the diffusive wave equation

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) - D \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

where x (m) is downstream distance, t (s) is time, C (m s⁻¹) and D (m² s⁻¹) are non-linear functions of the discharge $Q(x, t)$ (m³ s⁻¹) and are generally known as celerity and diffusivity, respectively. The term $q(x, t)$ (m² s⁻¹) represent the lateral inflow distribution. Let $Q_a(t)$ (m³ s⁻¹) be the total lateral inflow hydrograph

$$Q_a(t) = \int_0^L q(x, t) dx \quad (2)$$

L (m) being the length of the river reach. For this problem the boundary conditions are $Q(x, 0)$ (m³ s⁻¹) and the upstream inflow $Q(0, t)$ (m³ s⁻¹) with

$$Q(x, 0) = Q(0, 0) + \int_0^x q(\alpha, 0) d\alpha \quad (3)$$

and for $x = L$

$$Q(L, 0) = Q(0, 0) + Q_a(0) \quad (4)$$

The hypotheses made to simplify the Saint-Venant system are generally met in practical applications. In fact, their validity is questionable only in special cases such as estuaries or reservoir routing. Fortunately, this is not true in most practical applications of flood routing and the diffusive wave model can be successfully applied (Hayami, 1951; Price, 1974; Singh, 1994).

The diffusive wave approximation, like the full Saint-Venant system, requires the specification of both upstream and downstream boundary conditions, as well as patterns of lateral inflows. It can be used to model both the attenuation of the flood wave peak downstream and backwater effects resulting from obstructions to the flow and the confluence of different branches of the network (Dooge *et al.*, 1982; 1983). In practice, attenuation and dispersion of the flood wave may be masked by significant lateral inflow.

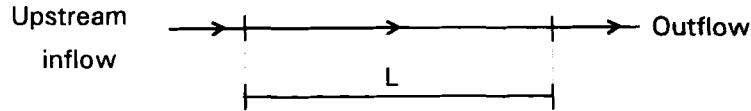


Figure 1. Schematic river reach without lateral inflow

Diffusive wave equation without lateral inflow

For a river reach without lateral inflow or outflow (Figure 1) [$q(x, t) = 0 \Rightarrow Q_a(t) = 0$ and $Q(L, 0) = Q(0, 0)$], the diffusive wave equation becomes

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

with C and D functions of the discharge Q .

In the particular case when $D = 0$, the diffusive model is reduced to the kinematic wave equation. Solution of the kinematic wave equation (Li *et al.*, 1975; Beven, 1979; Weinmann and Laurenson, 1979; Hromadka and De Vries, 1988) requires only an upstream boundary condition, which makes it convenient to implement for networks of channel reaches. However, the kinematic wave equation cannot predict backwater effects nor any dispersion or attenuation of the flood peak, which in a channel of constant form with no lateral inflows will move downstream unaltered at the kinematic wave speed C .

In the case of the diffusive wave equation, the parabolic and backwater scheme (Todini and Bossi, 1986) allows for variable C and D without lateral inflow, by linearizing Equation (5) and by considering C and D constant within a time increment, to compute a backwater profile, recomputed at each time step, for steady non-uniform flow. The discharge is then propagated at each time step using the updated values of C and D and a constant parameters parabolic response function. Hayami (1951), by means of the perturbation method, and Dooze (1973) and Natale and Todini (1975) by means of Laplace transforms, have derived a solution of Equation (5) for constant C and D . In the particular case of a semi-infinite channel, no physical downstream boundary condition exists (this may not be true in special cases such as in the inlets to lakes and reservoirs), the diffusive wave equation has an analytical solution: the Hayami model (1951)

$$Q(x, t) = Q(0, 0) + \frac{x}{2(\pi D)^{1/2}} \exp \frac{Cx}{2D} \int_0^t [Q(0, t - \tau) - Q(0, 0)] \exp \frac{[-Cx(\frac{x}{2D} + \frac{C\tau}{2D})]}{\tau^{3/2}} d\tau \quad (6)$$

for $0 \leq x \leq L$.

Let $I(t)$ and $O(t)$ be, respectively, the upstream inflow minus the baseflow and the downstream outflow minus the baseflow

$$I(t) = Q(0, t) - Q(0, 0) \quad (7)$$

$$O(t) = Q(L, t) - Q(L, 0) \quad (8)$$

and let $K(t)$ be the Hayami kernel function defined as

$$K(t) = \frac{L}{2(\pi D)^{1/2}} \frac{\exp[\frac{CL}{4D}(2 - \frac{t}{L} - \frac{Ct}{L})]}{t^{3/2}} = \left(\frac{\theta z}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\exp[z(2 - \frac{\theta}{t} - \frac{Ct}{L})]}{t^{3/2}} = K_{\theta, z}(t) \quad (9)$$

with

$$\theta = \frac{L}{C} \quad z = \frac{CL}{4D} \quad (10)$$

Substituting Equations (7), (8), (9) and (10) into Equation (6) gives

$$O(t) = \int_0^t I(t - \tau) K(\tau) d\tau = I(t) * K(t) \quad (11)$$

The symbol $(*)$ represents the convolution relation.

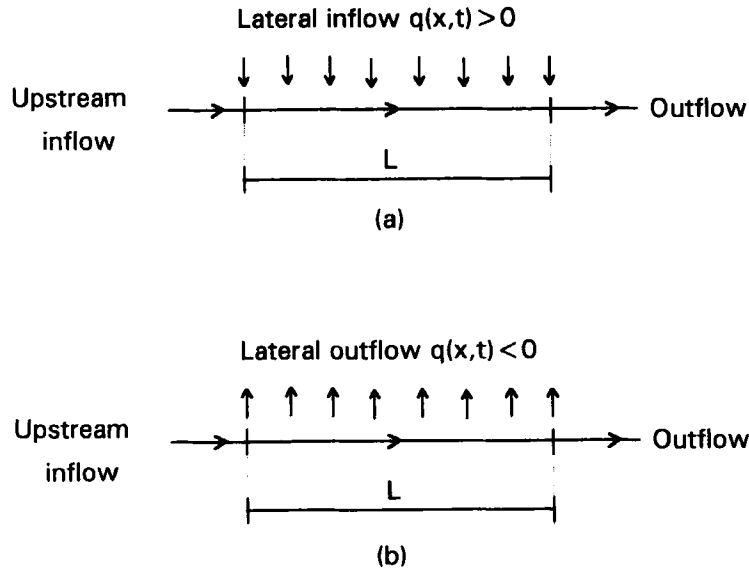


Figure 2. Schematic river reach with (a) lateral inflow or (b) lateral outflow

In practice, attenuation and dispersion of the flood wave may be masked by significant lateral inflows or outflows. When the lateral inflow (or outflow) is important, finite difference methods are still required. In addition, finite difference solutions of the diffusive wave equation may lead to numerical instabilities and to some dispersion and attenuation.

DIFFUSIVE WAVE WITH LATERAL INFLOW

This section proposes an analytical resolution of the diffusive wave equation with lateral inflow (or outflow) uniformly distributed over a channel reach (Figure 2) using the Hayami hypotheses (C and D constant and no physical downstream boundary condition).

Lateral inflow function $q(x,t)$

Larinier and Saucerotte (1970) have studied the general distribution of lateral inflow or outflow and proposed $q(x,t)$ as a multiplication of two functions

$$q(x,t) = f(x)g(t) \quad (12)$$

where $f(x)$ is a function of space that describes the lateral subcatchment shape and $g(t)$ is a function of time that describes the distribution of effective rainfall.

$$\begin{aligned} q(x,t) > 0 & \quad \text{Lateral inflow} \\ q(x,t) < 0 & \quad \text{Lateral outflow (i.e. seepage)} \end{aligned}$$

By combining Equations (1) and (12), we obtain

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = [Cf(x) - Df'(x)]g(t) \quad (13)$$

In the particular case where lateral flow is uniformly distributed along the river reach

$$q(x,t) = \frac{Q_a(t)}{L} \quad (14)$$

with

$$f(x) = \frac{1}{L} \quad \text{and} \quad g(t) = Q_a(t) \quad (15)$$

Substituting Equation (15) into (13) gives

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = C \frac{Q_a(t)}{L} \quad (16)$$

with initial condition

$$Q(x, 0) = Q(0, 0) + \frac{x}{L} Q_a(0) \quad (17)$$

Laplace transformation

The Laplace transformation is used to resolve the linear partial differential system of Equations (16) and (17). The Laplace transforms ($\mathcal{L}$) is defined as a function of a variable p by the integral

$$\mathcal{L}[Q(x, t)] = \bar{Q}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} Q(x, t) dt \quad (18)$$

$$\mathcal{L}[Q_a(t)] = \bar{Q}_a(p) = \int_0^\infty e^{-pt} Q_a(t) dt \quad (19)$$

By taking Laplace transforms of Equation (16) we obtain

$$p\bar{Q}(x, p) - Q(x, 0) + C \frac{d\bar{Q}(x, p)}{dx} - D \frac{d^2\bar{Q}(x, p)}{dx^2} = \frac{C}{L} \bar{Q}_a(p) \quad (20)$$

Substituting Equation (17) into Equation (20) gives

$$p\bar{Q}(x, p) + C \frac{d\bar{Q}(x, p)}{dx} - D \frac{d^2\bar{Q}(x, p)}{dx^2} = Q(0, 0) + \frac{x}{L} Q_a(0) + \frac{C}{L} \bar{Q}_a(p) \quad (21)$$

We obtain a second-order linear differential equation with constant coefficient. The general solution of an equation of this type can be expressed as the sum of the general solution of its reduced equation [obtained by setting the right-hand side of Equation (21) at 0] and a particular integral of Equation (21).

Solution of the reduced equation

The reduced equation of Equation (21) can be written as

$$p\bar{Q}(x, p) + C \frac{d\bar{Q}(x, p)}{dx} - D \frac{d^2\bar{Q}(x, p)}{dx^2} = 0 \quad (22)$$

The auxiliary equation

$$-Dr^2 + Cr + p = 0 \quad (23)$$

has roots $r1(p)$ and $r2(p)$

$$r1(p) = \frac{C - (C^2 + 4Dp)^{1/2}}{2D} \quad r2(p) = \frac{C + (C^2 + 4Dp)^{1/2}}{2D} \quad (24)$$

Hence the solution of the reduced equation can be expressed as

$$\bar{Q}(x, p) = \alpha \exp^{r1(p)x} + \beta \exp^{r2(p)x} \quad (25)$$

with

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\exp^{r1(p)x}] = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} [\exp^{r2(p)x}] = \infty \quad (26)$$

where α and β are arbitrary constants.

We obtain the same equation as the equation obtained by Hayami (1951), Dooge (1973) and Natale and Todini (1975) for the resolution of the diffusive wave equation without lateral inflow. If we take the assumption of a semi-infinite channel as the downstream boundary condition, the only solution physically acceptable is (Hayami, 1951)

$$\bar{Q}(x, p) = \alpha \exp^{r_1(p)x} \quad (27)$$

A particular integral

In Equation (21), the second member is polynomial and a particular solution can be found easily by the method of undetermined coefficients. This method is based on assuming a trial form for the particular function $\bar{Q}(x, p)$, which is dependent on the left-hand side of the equation and contains a finite number of arbitrary constants. The technique is to try the polynomial $(u + vx)$ and to determine the coefficients u and v such that the polynomial will be a particular solution of the equation, thus

$$pu + pvx + Cv = Q(0, 0) + \frac{x}{L} Q_a(0) + \frac{C}{L} \bar{Q}_a(p) \quad (28)$$

We now determine u and v by equating the right-hand and left-hand sides of Equation (28), which gives

$$v = \frac{Q_a(0)}{pL} \quad (29)$$

$$u = \frac{Q(0, 0)}{p} - \frac{CQ_a(0)}{Lp^2} + \frac{C}{L} \frac{\bar{Q}_a(p)}{p} \quad (30)$$

Therefore, the general solution of Equation (21) is

$$\bar{Q}(x, p) = \alpha \exp^{r_1(p)x} + \frac{Q(0, 0)}{p} - \frac{CQ_a(0)}{L} \frac{1}{p^2} + \frac{C}{L} \frac{\bar{Q}_a}{p} + \frac{Q_a(0)}{L} \frac{x}{p} \quad (31)$$

The value of α is determined using initial boundary conditions at $x = 0$ in Equation (31)

$$\mathcal{L}[Q(0, t)] = \bar{Q}(0, p) \quad (32)$$

$$\alpha = \bar{Q}(0, p) - \frac{Q(0, 0)}{p} - \frac{CQ_a(0)}{L} \frac{1}{p^2} + \frac{C}{L} \frac{\bar{Q}_a}{p} \quad (33)$$

By combining Equations (31) and (33), the general solution can be expressed as

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x, p) = & \left[\bar{Q}(0, p) - \frac{Q(0, 0)}{p} - \frac{CQ_a(0)}{L} \frac{1}{p^2} - \frac{C}{L} \frac{\bar{Q}_a(p)}{p} \right] \exp^{r_1(p)x} \\ & + \frac{Q(0, 0)}{p} + \frac{CQ_a(0)}{L} \frac{1}{p^2} + \frac{C}{L} \frac{\bar{Q}_a(p)}{p} + \frac{Q_a(0)}{L} \frac{x}{p} \end{aligned} \quad (34)$$

which gives, on inversion, the solution of the diffusive wave equation with uniformly distributed lateral inflow.

Inverse Laplace transforms

Equation (34) can be expressed as

$$\bar{Q}(x, p) = \bar{H}_1(x, p) + \bar{H}_2(p) \exp^{r_1(p)x} \quad (35)$$

We now introduce the inverse operator $\mathcal{L}^{-1}(\)$ of a given function f , such that

$$\mathcal{L}[f(x)] = \bar{f}(p) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = f(x) \quad (36)$$

Hence using the convolution theorem, the solution of Equation (35) can be written as

$$Q(x, t) = [\mathcal{L}^{-1}(\bar{H}_1)](x, t) + \int_0^t [\mathcal{L}^{-1}(\bar{H}_2)](x, t) \{ \mathcal{L}^{-1}[\exp^{r_1(p)x}] \}(x, t - \tau) d\tau \quad (37)$$

Inverse transforms may be most conveniently found from a table of standard transforms. Consequently,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q(0,0)}{p} \right] = Q(0,0) \quad (38)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q_a(0)x}{Lp} \right] = \frac{Q_a(0)x}{L} \quad (39)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{CQ_a(0)}{Lp^2} \right] = \frac{CQ_a(0)}{L} t \quad (40)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C \overline{Q_a(p)}}{Lp} \right] = \frac{C}{L} \int_0^t Q_a(\tau) d\tau \quad (41)$$

Using the inverse Laplace transforms Equations (32), (38), (39), (40) and (41), we obtain

$$\begin{aligned} H_1(x,t) &= Q(0,0) + \frac{Q_a(0)}{L} x + \frac{CQ_a(0)}{L} t + \frac{C}{L} \int_0^t Q_a(\tau) d\tau \\ &= Q(0,0) + \frac{Q_a(0)}{L} x + \frac{C}{L} \int_0^t [Q_a(\tau) - Q_a(0)] d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

and

$$H_2(x,t) = Q(0,t) - Q(0,0) - \frac{C}{L} \int_0^t [Q_a(\tau) - Q_a(0)] d\tau \quad (43)$$

To calculate $\mathcal{L}^{-1}[\exp^{r1(p)x}]$, we need the two properties of the Laplace transformation

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-kp^{1/2}}) = \frac{k}{2(\pi t^3)^{1/2}} \exp^{-(k^2/4t)} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}^{-1}[f(k+p)] = \exp^{-kt} f(t) \quad (44)$$

with k constant, so

$$\mathcal{L}^{-1}[\exp^{r1(p)x}] = \mathcal{L}^{-1}[\exp^{\frac{C-(C^2+4Dp)^{1/2}}{2D}x}] = \exp^{\frac{Cx}{2D}} \mathcal{L}^{-1}[\exp^{\frac{-x}{D^{1/2}}(\frac{C^2}{4D}+p)^{1/2}}] = \exp^{\frac{Cx}{2D}} \frac{x}{2(D\pi)^{1/2}} \frac{\exp^{-\frac{C^2x}{4D}-\frac{x^2}{4Dt}}}{t^{3/2}} \quad (45)$$

By substituting Equations (42), (43) and (45) into Equation (35), we obtain the outflow at time t , at the abscissa x

$$\begin{aligned} Q(x,t) &= \left[Q(0,0) + \frac{Q_a(0)}{L} x + \frac{C}{L} \int_0^t [Q_a(\lambda) - Q_a(0)] d\lambda \right] \\ &\quad + \frac{x}{2(\pi D)^{1/2}} \exp^{\frac{Cx}{2D}} \int_0^t \left[Q(0,t-\tau) - Q(0,0) - \frac{C}{L} \int_0^{t-\tau} [Q_a(\lambda) - Q_a(0)] d\lambda \right] \frac{\exp^{-\frac{Cx}{2D}(\frac{x}{\tau} + \frac{Cx}{x})}}{\tau^{3/2}} d\tau \end{aligned} \quad (46)$$

We define a new function $\Phi(t)$ that characterizes the lateral inflow as

$$\Phi(t) = \frac{C}{L} \int_0^t [Q_a(\lambda) - Q_a(0)] d\lambda \quad (47)$$

so

$$Q_a(t) = Q_a(0) + \frac{L}{C} \frac{d\Phi}{dt} \quad (48)$$

With the already used notations Equations (7), (8), (9) and (48), the general Equation (46) can be expressed as

$$O(t) = \Phi(t) + [I(t) - \Phi(t)] * K(t) \quad (49)$$

The Hayami kernel function $K(t)$ in Equation (49) is identical to that obtained in Equation (11). The

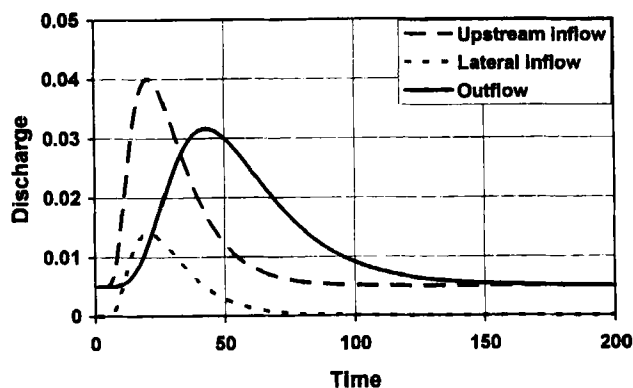


Figure 3. Flood routing using the generalized Hayami model with lateral inflow

Equation (11) of the Hayami model without lateral inflow [$Q_a(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = 0$] becomes a particular case of the Equation (49), which gives the generalized form of the Hayami analytical model for the resolution of the diffusive wave equation with lateral inflow or outflow uniformly distributed over a channel reach. Figures 3 and 4 show a theoretical case of flood routing using the generalized Equation (49) with, respectively, lateral inflow [$Q_a(t) > 0$] and lateral outflow [$Q_a(t) < 0$].

The new analytical solution proposed is unconditionally stable, requires only an upstream boundary condition, which makes it convenient to implement for networks of channel reaches, and has the benefit of ending as a simple computer program. The major advantages of the method relate to computer simulation, real-time forecasting and control applications in cases where numerical instabilities in the solution of the partial differential equations must be avoided.

INVERSE PROBLEM: IDENTIFICATION OF LATERAL INFLOW

The inverse problem concerns the identification of lateral inflow or outflow between an upstream and a downstream section on the basis of the knowledge of hydrographs at these two sections. In this instance the two functions $I(t)$ and $O(t)$ are known and the problem is to identify $Q_a(t)$. For that, using Equation (49), we obtain

$$A(t) = O(t) - I(t) * K(t) \quad (50)$$

with

$$\Phi(t) - \Phi(t) * K(t) = A(t) \quad (51)$$

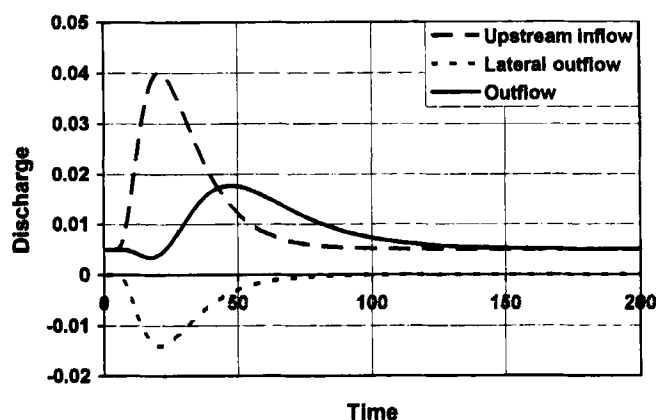


Figure 4. Flood routing using the generalized Hayami model with lateral outflow

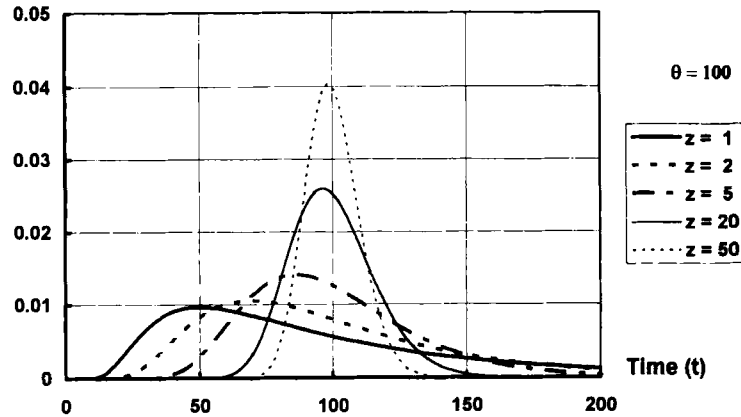


Figure 5. Different form of the Hayami kernel function with the parameters θ constant and z variable

The resolution of Equations (50) and (51) needs, firstly, the identification of the Hayami kernel function $K(t)$, secondly calculation of $A(t)$ using Equation (50), then resolving Equation (51) to calculate the function $\Phi(t)$ and finally identifying $Q_a(t)$ using Equation (48).

Mathematical properties of the Hayami kernel function

The Hayami kernel $K(t)$ is a function of time t and can be defined using two parameters θ and z defined in Equation (10). Figure 5 shows different Hayami kernel functions for different values of θ and z . As $K(t)$ is a continuous function of time t with continuous derivatives, using Taylor's series applied to a given function $f(t)$ gives

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{p^i}{i!} t^i f(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{p^i}{i!} M_i \quad (52)$$

with

$$M_i = \int_0^{\infty} t^i f(t) dt \quad (53)$$

M_i is the moment of order (i) of a given function $f(t)$. Using Maclaurin's series, we have

$$\bar{f}(p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{i!} \frac{d^i \bar{f}}{dp^i} (0) \quad (54)$$

By equating Equations (52) and (54) we obtain

$$M_i = (-1)^i \frac{d^i \bar{f}}{dp^i} (0) \quad (55)$$

The moments of order (0), (1) and (2) are used by Bocquillon (1978) to characterize the mathematical properties of the kernel function $K(t)$ defined in Equation (9). Equation (45) gives the Laplace transformation of $K(t)$. Substituting Equations (9) and (10) into Equation (45) gives

$$\bar{K}(p) = \exp^{2z} \exp^{-2z(1+\frac{\theta}{z}p)^{1/2}} \quad (56)$$

The derivation of Equation (56) gives

$$\frac{d\bar{K}}{dp} = - \frac{\theta}{\left(1 + \frac{\theta}{z}p\right)^{1/2}} \exp^{2z} \exp^{-2z(1+\frac{\theta}{z}p)^{1/2}} \quad (57)$$

and

$$\frac{d^2 \bar{K}}{dp^2} = \left[\frac{\theta^2}{1 + \frac{\theta}{z}p} + \frac{1}{2} \frac{\frac{\theta^2}{z}}{\left(1 + \frac{\theta}{z}p\right)^{3/2}} \right] \exp^{2z} \exp^{-2z(1 + \frac{\theta}{z}p)^{1/2}} \quad (58)$$

Equation (55) gives the zero-, first- and second-order moments of $K(t)$

$$M_0 = \frac{d\bar{K}}{dp}(0) = \int_0^\infty K(\tau) d\tau = 1 \quad (59)$$

$$M_1 = -\frac{d\bar{K}}{dp}(0) = \int_0^\infty Kt dt = \theta \quad (60)$$

$$M_2 = \frac{d^2 \bar{K}}{dp^2}(0) = \int_0^\infty Kt^2 dt = \theta^2 \left(1 + \frac{1}{2z}\right) \quad (61)$$

The zero-moment M_0 verifies that $K(t)$ is a kernel function, the integral of $K(t)$ is equal to unity. For flood routing without lateral inflow we have conservation of the volume. The first-order moment M_1 is equal to the parameter θ , which is a time that represents the centre of gravity of $K(t)$ and the second-order moment M_2 is proportional to the parameter z which characterizes the form of the function $K(t)$ (i.e. for highest values of the diffusivity D , z is low and M_2 high).

Identification of the Hayami kernel function $K(t)$

The resolution of the system Equations (50) and (51) needs first the identification of the Hayami kernel function $K(t)$. The problem is to calculate the two parameters θ and z in the case when upstream inflow $Q(0, t)$ and downstream outflow $Q(L, t)$ are known. The technique proposed by Bocquillon and Moussa (1988) for the identification of $K(t)$ is first to choose flood events where lateral inflow could be neglected and then to apply the Hayami analytical model for flood routing without lateral inflow obtained in Equation (11) ($\bar{O} = \bar{I}\bar{K}$).

Let MI_0 , MI_1 and MI_2 be the zero-order, the first-order moment, and the second-order moment, respectively, of the function $I(t)$ and let MO_0 , MO_1 and MO_2 be the zero-order, the first-order moment and the second-order moment, respectively, of the function $O(t)$.

$$MI_0 = \int_0^\infty I dt = V_1 \quad MO_0 = \int_0^\infty O dt = V_O \quad (62)$$

$$MI_1 = \int_0^\infty It dt = V_1 T_1 \quad MO_1 = \int_0^\infty Ot dt = V_O T_O \quad (63)$$

$$MI_2 = \int_0^\infty It^2 dt \quad MO_2 = \int_0^\infty Ot^2 dt \quad (64)$$

with V_1 and V_O the volume of the inflow function $I(t)$ at the upstream section and the volume of the outflow function $O(t)$ at the downstream section, respectively, and T_1 and T_O the centre of gravity of $I(t)$ and $O(t)$, respectively. Using the Taylor's series as defined in Equation (52), Equation (11) gives

$$\left(MO_0 - MO_1 p + MO_2 \frac{p^2}{2} + \dots \right) = \left(MI_0 - MI_1 p + MI_2 \frac{p^2}{2} + \dots \right) \left[1 - \theta p + \left(\theta^2 + \frac{\theta^2}{2z} \right) \frac{p^2}{2} + \dots \right] \quad (65)$$

By equating the right-hand and left-hand sides of Equation (65), we can determine the constants and the coefficients of p and p^2 . The constant value is

$$V_1 = V_O = V \quad (66)$$

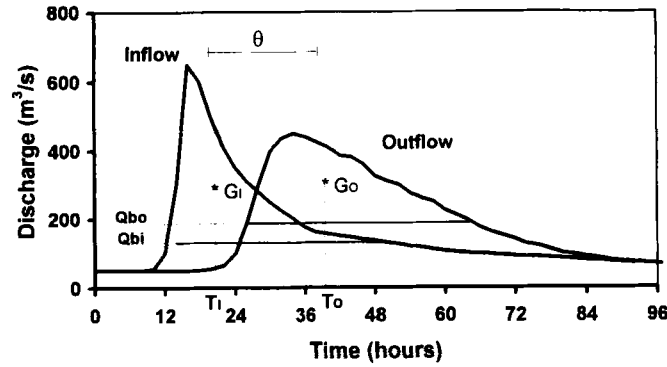


Figure 6. Hydrological analysis of the shape of upstream and downstream hydrographs. Hérault river event of October 1958

The coefficient of p gives

$$\theta = \frac{MO_1 - MI_1}{V} = T_O - T_1 \quad (67)$$

and the coefficient of p^2

$$\frac{MO_2}{2} = \frac{MI_2}{2} + \theta MI_1 + \frac{\theta^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2z}\right) MI_0 \quad (68)$$

To obtain a simple relation, we introduce MI'_2 and MO'_2 , the second-order moment of $I(t)$ and $O(t)$ defined by translating the t -axis, respectively, to T_1 and T_O . We obtain

$$MI'_2 = \int_0^\infty (t - T_1)^2 I(t) dt = MI_2 - 2T_1 MI_1 + T_1^2 MI_0 = MI_2 - T_1^2 V \quad (69)$$

$$MO'_2 = \int_0^\infty (t - T_O)^2 O(t) dt = MO_2 - 2T_O MO_1 + T_O^2 MO_0 = MO_2 - T_O^2 V \quad (70)$$

Substituting Equations (69) and (70) Equation (68) gives

$$z = \frac{1}{2} \frac{V(T_O - T_1)^2}{MO'_2 - MI'_2} \quad (71)$$

The two parameters θ and z can be calculated using Equations (67) and (71), respectively. By combining Equations (10), (67) and (71) we can calculate the two parameters C and D of the diffusive wave equation

$$C = \frac{L}{\theta} = \frac{L}{T_O - T_1} \quad (72)$$

and

$$D = \frac{L^2}{4\theta z} = \frac{L^2(MO'_2 - MI'_2)}{2(T_O - T_1)^3} = \frac{C^3(MO'_2 - MI'_2)}{2L} \quad (73)$$

Figure 6 shows as an application the flood event of October 1958 on the River Hérault, southern France between the upstream section at Moulin Bertrand and the downstream section at Agde ($L = 90$ km). In practical cases when lateral inflow could not be neglected, the technique proposed is divided into three steps.

Firstly, we calculate the maximum peak of the inflow function $Q(0, t)$ and the outflow function $Q(L, t)$, noted, respectively, $Q_{I_{\max}}$ and $Q_{O_{\max}}$. To eliminate the influence of baseflow, we introduce two thresholds

respectively Q_{lb} and Q_{ob} . The two functions $I(t)$ and $O(t)$ are defined in practice as

$$I(t) = Q(0, t) - Q_{lb} \quad \text{if } Q(0, t) \geq Q_{lb} \quad \text{and} \quad I(t) = 0 \quad \text{if } Q(0, t) < Q_{lb} \quad (74)$$

$$O(t) = Q(L, t) - Q_{ob} \quad \text{if } Q(L, t) \geq Q_{ob} \quad \text{and} \quad O(t) = 0 \quad \text{if } Q(L, t) < Q_{ob} \quad (75)$$

The second step is to choose the threshold Q_{lb} and then calculate the volume V_1 as defined in Equation (62)

$$V_1 = \int_0^\infty I(t) dt$$

Finally, we identify the threshold Q_{ob} that verifies the relation

$$V_1 = \int_0^\infty O(t) dt = V_O$$

For the application in Figure 6, we have $Q_{I_{\max}} = 650 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ and $Q_{O_{\max}} = 450 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. If we choose $Q_{lb} = 0.2 Q_{I_{\max}} = 130 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ we obtain $V_1 = 20.03 \times 10^6 \text{ m}^3$. Then we calculate the threshold Q_{ob} that gives $V_O = V_1$, we obtain $Q_{ob} = 186 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Once the two thresholds Q_{lb} and Q_{ob} have been defined, the two functions $I(t)$ and $O(t)$ can be identified and we can calculate the moments obtained in Equations (62), (63), (69) and (70). Finally, using Equations (67), (71), (72) and (73), we obtain $\theta = 18.8 \text{ h}$, $z = 6.32$, $C = 1.33 \text{ m s}^{-1}$ and $D = 4734 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

The parameter θ represents the distance (in time) between the centres of gravity of $I(t)$ and $O(t)$ and z characterizes the diffusivity of the wave. This methodology allows the user to calculate the two parameters θ and z and then the Hayami kernel function $K(t)$ is completely identified.

Identification of lateral inflow

The next step is to identify lateral inflow by solving Equation (51). In Equation (51), the unknown $\Phi(t)$ occurs under an integral sign and the equation is known as Volterra's equation. Using Laplace transforms, Equation (51) gives

$$\bar{\Phi} - \bar{\Phi} \bar{K} = \bar{A} \quad (76)$$

In Equation (76) we can calculate $\bar{\Phi}$

$$\bar{\Phi} = \frac{\bar{A}}{1 - \bar{K}} = \bar{A} \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{K})^i \quad (77)$$

with $(\bar{K})^0 = \delta$ (The Dirac function).

Using the inverse Laplace transforms, Equation (77) gives

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} [A(t) * K^i(t)] = A(t) + A(t) \sum_{i=1}^{\infty} K^i(t) \quad (78)$$

with

$$K^i(t) = K * K * \dots * K \quad (i \text{ times}) \quad (79)$$

It is simply to verify that the function $K^i(t)$ is also a Hayami kernel function defined with two parameters θ_i and z_i with $[K^i(t) = K_{\theta_i, z_i}(t)]$, we have

$$\begin{aligned} \bar{K}^i &= (\bar{K})^i = (\exp^{2z - 2(z^2 + \theta zp)^{1/2}})^i = \exp^{2iz - 2i(z^2 + \theta zp)^{1/2}} \\ &= \exp^{2iz - 2[(iz)^2 + (i\theta)(iz)p]^{1/2}} = \bar{K}_{i\theta, iz} \end{aligned} \quad (80)$$

then

$$K^i(t) = K_{i\theta, iz}(t) \quad \text{with} \quad \theta_i = i\theta, z_i = iz \quad (81)$$

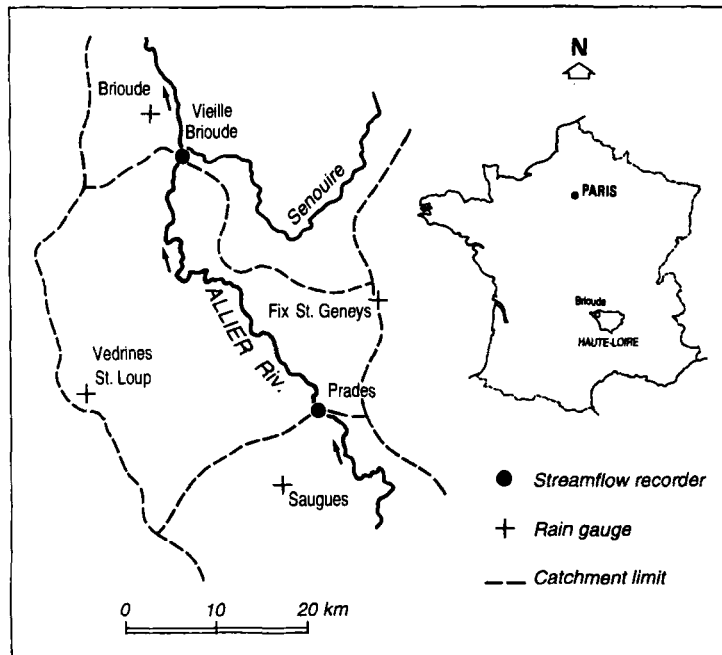


Figure 7. Location of equipment

Then Equation (51) can analytically be solved by (1) identifying the Hayami kernel function $K(t)$ using the technique proposed on the previous section; (2) calculating the functions $K^i(t)$ using Equation (81); (3) calculating $A(t)$ using Equation (50); (4) calculating the function $\Phi(t)$ using Equation (78); and (5) calculating the lateral inflow distribution in time $Q_a(t)$ using Equation (48).

APPLICATION

The River Allier in France between Prades and Vieille Brioude ($L = 42$ km) was used as application case (Moussa *et al.*, 1992). The lateral subcatchment (area 919 km^2) is equipped with four rain gauges and two streamflow recorders that give upstream inflow at Prades (catchment area 1350 km^2) and downstream outflow at Vieille Brioude (catchment area 2269 km^2) (Figure 7).

Thirteen inflow–outflow hydrographs measured by EPALA (Etablissement Public d'Aménagements de la Loire et de ses Affluents) were considered between 1973 and 1991. The time step is two hours. Table I gives the hydrological characteristics of each flood event. For all flood events the maximum peak of outflow is superior to the maximum peak of inflow and the volume of outflow at Vieille Brioude (V_{VB}) is superior to the volume of inflow at Prades (V_P), reflecting the presence of lateral inflow. The volume of lateral inflow represents between 3% (event of 1–18 March 1991) and 125% (event of 24–29 April 1989) of the volume of inflow V_P at Prades.

The aim is to propose a model that simulates outflow at Vieille Brioude using as inputs the measured inflow at Prades and a lateral inflow calculated using a simple rainfall–runoff model. The methodology proposed is divided into four steps.

The first step was to analyse inflow–outflow hydrographs where lateral inflow could be neglected—for example, events of 1–18 March 1991 and 21–26 January 1977. For these two events the volume of lateral inflow did not exceed 10% of the volume of inflow. The technique proposed earlier was used to identify the Hayami kernel function defined by the parameters θ and z and the parameters C and D of the diffusive wave equation. We find mean values of $\theta = 5$ h, $z = 5.5$, $C = 2.3 \text{ m s}^{-1}$ and $D = 4500 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. The second step was to identify lateral inflow using the deconvolution technique defined in Equation (78). For that we need to

Table I. Hydrological characteristics of flood events on the River Allier between Prades and Vieille Brioude

Date of event	Total precipitation (mm)	Inflow		Outflow		Lateral volume ($\frac{V_{VB} - V_P}{V_P}$)
		Peak ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)	Volume (V_P) (10^6m^3)	Peak ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)	Volume (V_{VB}) (10^6m^3)	
19–30 December 1973	–	989	208	1388	287	0.38
23–27 October 1976	104	732	103	957	136	0.32
9–12 November 1976	31	985	98	1118	120	0.22
21–26 January 1977	36	271	61	330	68	0.10
20–23 September 1980	19	1350	48	1329	63	0.30
15–19 October 1980	41	327	29	351	34	0.17
28 March–4 April 1981	63	233	77	397	117	0.53
6–11 November 1982	24	731	66	716	78	0.18
23 April to 4 May 1983	110	435	160	683	243	0.51
20–29 April 1986	67	274	105	402	166	0.58
1–4 May 1988	56	240	33	319	59	0.79
24–29 April 1989	51	93	23	223	52	1.25
1–18 March 1991	–	298	110	305	114	0.03

calculate the function

$$K_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{\infty} K^i(t)$$

Figure 8 shows the different functions $K, K^2, K^3, \dots$ and that the sum K_{tot} is convergent. Then, using Equation (78), we identify for each flood event (inflow–outflow) the function $\Phi(t)$ and lateral inflow function $Q_a(t)$ using Equation (48). Figure 9 shows, for example, the lateral inflow identified for the event of 23 April–4 May 1983.

The third step was to calibrate a rainfall-runoff model that simulates lateral inflow using as inputs the measured precipitation. A simple rainfall-runoff model using an empirical Philip-type infiltration equation (Philip, 1969) was used to calculate rainfall losses. The precipitation is usually of high intensity, short duration and large spatial variability. The spatial distribution of rainfall was estimated by the Thiessen method. The rainfall intensity and the initial soil moisture state are the main factors affecting runoff production. The parameters of the Philip equation were determined by trial and error such that the calculated effective rainfall routed through the lateral catchment using a kinematic wave equation was equal to the function $Q_a(t)$.

The last step was to route measured upstream inflow at Prades and the calculated lateral inflow by the

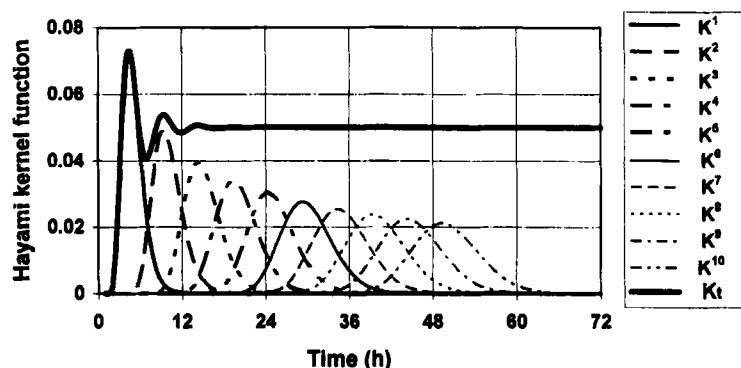


Figure 8. Hayami inverse function. Application on the River Allier ($\theta = 5 \text{ h}$ and $z = 5.5$)

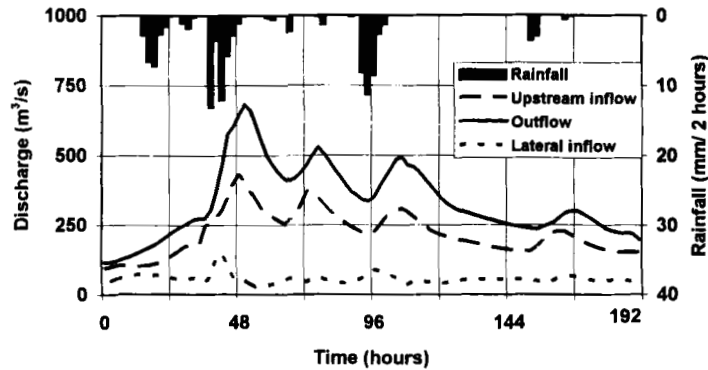


Figure 9. Identification of the lateral inflow distribution using the inverse method on the River Allier. Event 25 April–2 May 1983

rainfall–runoff model through the channel river to simulate outflow at Vieille Brioude. Figure 10 shows an application case using the generalized Hayami model with lateral inflow uniformly distributed between Prades and Vieille Brioude as defined in Equation (46) for the same event of 23 April–4 May 1983. Figures 11 and 12 compare the observed discharge and simulated discharge for eight flood events on the Allier catchment and show the efficiency of the model.

CONCLUSIONS

In many instances, the propagation of flood waves on a channel network can be obtained by using the diffusive wave equation, which depends on two parameters: celerity and diffusivity. In the particular case when these two parameters are constant, the diffusive wave equation has an analytical solution: the Hayami model.

A general Hayami model solution to the diffusive wave equation was developed under the assumptions of constant parameters and uniformly distributed lateral inflow or outflow over a river reach. The analytical solution proposed is unconditionally stable, requires only an upstream boundary condition, which makes it convenient to implement for networks of channel reaches, and has the advantage of ending as a simple computer program. Two domains of application are proposed. Firstly, the prediction of the hydrograph at a downstream section on the basis of a knowledge of the hydrograph at an upstream section and the lateral inflow. The second case concerns the lateral inflow identification between an upstream and a downstream section on the basis of a knowledge of hydrographs at the upstream and downstream sections.

The major advantages of the method relate to computer simulation, real-time forecasting and control

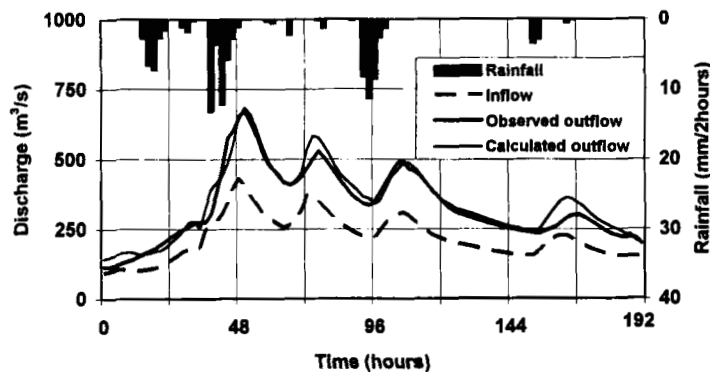


Figure 10. Flood routing over the River Allier using the generalized Hayami model with lateral inflow. Event 25 April–2 May 1983

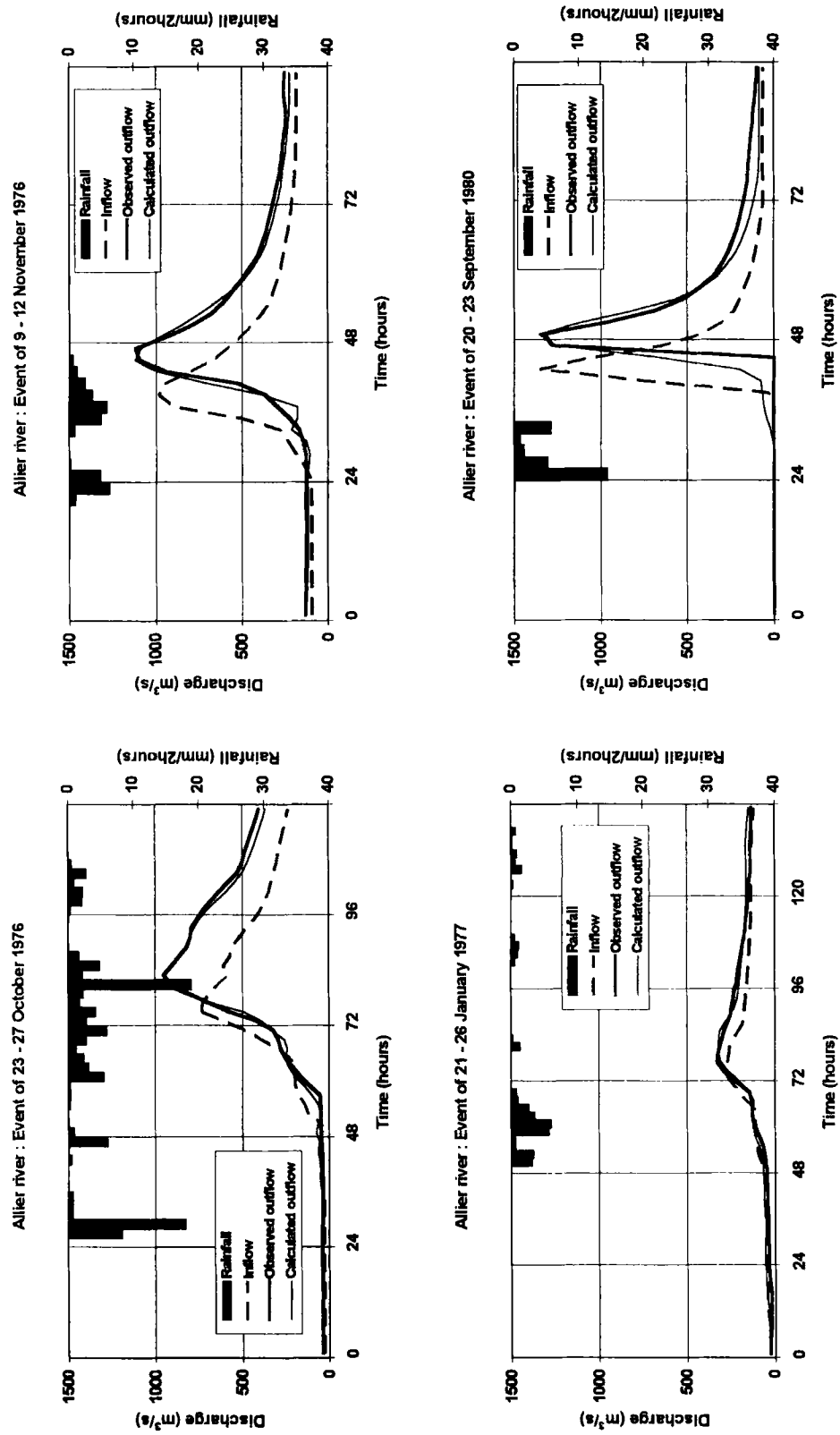


Figure 11. Comparison between observed discharge and simulated discharge for four flood events on the Allier catchment

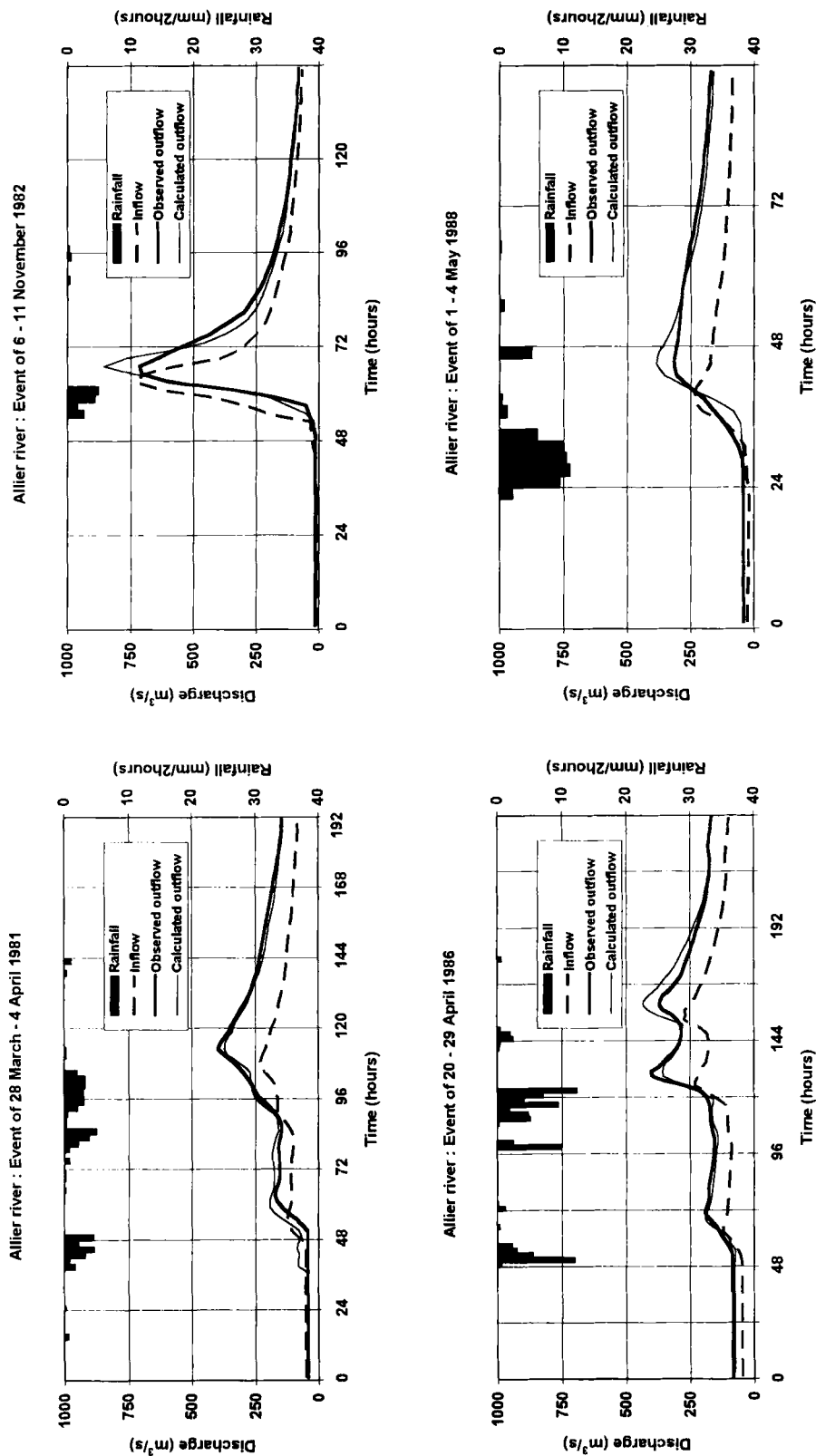


Figure 12. Comparison between observed discharge and simulated discharge for four flood events on the Allier catchment

applications when numerical instabilities in the solution of the partial differential equations must be avoided.

A methodology for flood routing between two sections when upstream inflow and downstream outflow are measured is proposed. The methodology is based on the identification first of flood routing parameters, celerity and diffusivity, and then of the lateral inflow function. An application case over the Allier basin shows the efficiency of the method and that it is well adapted for flood routing, with important lateral inflow uniformly distributed over a channel reach.

REFERENCES

- Abbott, M. B. 1966. *An Introduction to the Method of Characteristics*. Elsevier, New York.
- Abbott, M. B. 1979. *Computational Hydraulics*. Pitman, London. 324 pp.
- Beven, K. J. 1979. 'On the generalised kinematic routing method', *Wat. Resour. Res.*, **15**, 1238–1242.
- Bocquillon, C. 1978. 'Propagation des écoulements transitoires intermittents dans les systèmes hydrauliques à surface libre', *Rapport Laboratoire d'Hydrologie Mathématique, Université de Montpellier II*, **44/78**, 85 pp.
- Bocquillon, C. and Moussa, R. 1988. 'COMOD: logiciel de choix de modèles d'ondes diffusantes et de leurs caractéristiques', *La Houille Blanche*, **5/6**, 433–437.
- Cooley, R. L. and Moin, S. A. 1976. 'Finite element solution of Saint-Venant equations', *ASCE J. Hydr. Div.*, **102**(HY6), 759–775.
- Crank, J. and Nicholson, P. 1947. 'A practical method for numerical integration of solutions of partial differential equations of heat-conduction type', *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **43**, 50 pp.
- Cunge, J. Holly, F. M., and Verwey, A. 1980. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Program, London. 420 pp.
- Daluz Viera, J. H. 1983. 'Conditions governing the use of approximations for the Saint-Venant equations for shallow water flow', *J. Hydrol.*, **60**, 43–58.
- Dooe, J. C. I. 1973. 'Linear theory of hydrologic system', *US Dept. Agric., Tech. Bull.*, **1468**.
- Dooe, J. C. I. and Harley, B. M. 1967. 'Linear routing in uniform channels', *Proc. Int. Hydrol. Symp.*, **1**, Colorado State University, Fort Collins. pp. 57–63.
- Dooe, J. C. I., Strupczewski, W. B., and Napiorkowski, J. J. 1982. 'Hydrodynamic derivation of storage parameters of the Muskingum model', *J. Hydrol.*, **54**, 371–387.
- Dooe, J. C. I., Kundzewicz, Z. W., and Napiorkowski, J. J. 1983. 'On backwater effects in linear diffusion routing', *Hydrol. Sci. J.*, **28**, 391–402.
- Ferrick, M. G. 1985. 'Analysis of river wave types', *Wat. Resour. Res.*, **21**(2), 209–212.
- Ferrick, M. G., Bilmes, J., and Long, S. E. 1984. 'Modeling rapidly varied flow in tailwaters', *Wat. Resour. Res.*, **20**, 271–289.
- Fread, D. 1985. 'Flood routing'. In Anderson, M. G. and Burt, T. P. (Editors), *Hydrological Forecasting*. Wiley, Chichester.
- Greco, F. and Panattoni, L. 1977. 'Numerical solutions methods of the Saint-Venant equations' in Ciriani, T. A., Maione, U., and Wallis, J. R. (Eds), *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*. Wiley, Chichester. pp. 181–194.
- Hayami, S. 1951. 'On the propagation of flood waves', *Disaster Prev. Res. Inst. Bull.*, **1**, 1–16.
- Henderson, F. M. 1963. 'Flood waves in prismatic channels', *ASCE J. Hydr. Div.*, **89**(HY4), 39–67.
- Henderson, F. M. 1966. *Open Channel Flow*. Macmillan, New York.
- Hromadka, T. V. and De Vries, J. J. 1988. 'Kinematic wave and computational error', *ASCE J. Hydr. Div.*, **114**, 207–217.
- Katopodes, N. D. 1982. 'On zero-inertia and kinematic waves', *ASCE J. Hydr. Div.*, **108**(HY11), 1380–1385.
- Larinier, M. and Saucerotte, H. 1970. 'La propagation des crues à partir des hypothèses d'Hayami', *Rapport du Laboratoire d'Hydrologie Mathématique*, **16/70**, Université Montpellier II. 45 pp.
- Li, R. M., Simons, D. B., and Stevens, M. A. 1975. 'Nonlinear kinematic wave approximation for water routing', *Wat. Resour. Res.*, **11**, 245–252.
- Moussa, R. and Bocquillon, C. 'Algorithms for solving the diffusive wave flood routing equations', *Hydrol. Process.*, in press.
- Moussa, R., Raymond, M., and Casteill, L. 1992. 'Prévision des crues à l'entrée du barrage du Veurde: étude du bassin de l'Allier', *Rapport du Laboratoire d'Hydrologie et Modélisation, Université Montpellier II*. 97 pp.
- Natale, L. and Todini, E. 1975. 'A constrained parameter estimation techniques for linear models in hydrology' in *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*. Wiley, Chichester.
- Philip, J. R. 1969. 'The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations', *Soil Sci.*, **116**, 257–264.
- Ponce, V. M. 1990. 'Generalized diffusive wave equation with inertial effects', *Wat. Resour. Res.*, **26**, 1099–1101.
- Ponce, V. M. and Simons, D. B. 1977. 'Shallow wave propagation in open channel flow', *ASCE J. Hydr. Div.*, **103**(HY12), 1461–1476.
- Ponce, V. M., Li, R. M., and Simons, D. B. 1978. 'Applicability of kinematic and diffusion models', *ASCE J. Hydr. Div.*, **104**(HY3), 353–360.
- Price, R. K. 1974. 'Comparison of four numerical methods for flood routing', *ASCE J. Hydr. Div.*, **100**(HY7), 879.
- Romanowicz, R. J., Dooe, J. C. I., and Kundzewicz, Z. W. 1988. 'Moments and cumulants of linearized St. Venant equation', *Adv. Wat. Resour.*, **11**, 92–100.
- Remson, R. D., Hornberger, G. M., and Molz, F. J. 1971. *Numerical Methods in Subsurface Hydrology*. Wiley Interscience, New York. 399 pp.
- Richtmeyer, R. D. and Morton, K. W. 1967. *Difference Methods for Initial Value Problems*. Interscience, New York. 405 pp.
- Saint-Venant, B. 1871. 'Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits', *C. R. Séan Acad. Sci.*, **73**, 147–154; 237–240.
- Singh, V. P. 1994. 'Accuracy of kinematic wave and diffusion wave approximations for space-independent flows with lateral inflow neglected in the momentum equation', *Hydrol. Process.*, **8**, 311–326.

- Smith, G. D. 1978. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Clarendon Press, Oxford. 304 pp.
- Stoker, J. J. 1957. *Water Waves*. Interscience Press, New York.
- Szymkiewicz, R. 1991. 'Finite-element method for the solution of the Saint-Venant equations in an open channel network', *J. Hydrol.*, **122**, 275–287.
- Todini, E. and Bossi, A. 1986. 'PAB (parabolic and backwater): an unconditionally stable flood routing scheme particularly suited for real time forecasting and control', *J. Hydr. Res.*, **24**, 405–424.
- Weinmann, P. E. and Laurenson, E. M. 1979. 'Approximate flood routing methods: a review', *ASCE J. Hydr. Div.*, **105**(HY12), 1521–1536.
- Woolhiser, D. A. and Liggett, J. A. 1967. 'Unsteady one-dimensional flow over a plane: the rising hydrograph', *Wat. Resour. Res.*, **3**, 753–771.